VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Vybrané hry pohledem diskrétní matematiky

Some board games from discrete mathematics point of view

2017

Sára Linhartová

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání bakalářské práce

Student: **Sára Linhartová**

Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika

Téma: Vybrané hry pohledem diskrétní matematiky
Some board games from dicrete mathematics point of view

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Cílem práce je rozebrat postup ve hrách, kde figurka postupuje po hracích polích herního plánu na základě hodů kostkou. Je snadné si uvědomit, že pro různá pole hracího plánu je různá pravděpodobnost, že figurka se na dané pole dostane.
Cílem práce je udělat pečlivý rozbor pravděpodobností v závislosti na kostce i na pravidlech hry, kdy:
- klasickou 6-stěnnou kostku dovolíme nahradit n-stěnnou kostkou,
- klasickou kostku nahradíme kostkou s předepsanými pravděpodobnostmi stěn,
- dovolíme dodatečný hod, jestliže padne 6,
- musíme se všemi figurkami skončit "v domečku" na předepsaných pozicích.

Rozbor hry bude obsahovat například
- očekávaný počet kol celé hry,
- doporučenou strategii, kdy nasadit novou figurku a kdy pokračovat v pohybu podle toho, kolik figurek se na herním plánu nachází,
- doporučenou strategii kterou figurkou táhnout v závislosti na rozmístění dalších figurek na herním plánu a podobně.

Část práce bude věnována analogickému rozboru dalších her, jako Monopoly, Kruhy a další.

Seznam doporučené odborné literatury:

- M. Matoušek, J. Nešetřil, Kapitoly z Diskrétní matematiky, Karolinum Praha, 2000
- D. West, Graph Theory, Prentice-Hall, Upper Saddle River NJ, 2001.
- P. Kovář, Teorie grafů, VŠB-TU Ostrava, 2012.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2016

Datum odevzdání: 28.04.2017

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D. *vedoucí katedry*	prof. RNDr. Václav Snášel, CSc. *děkan fakulty*

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně. Uvedla jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpala.

V Ostravě 28. dubna 2017 ....

Souhlasím se zveřejněním této diplomové práce dle požadavků čl. 26, odst. 9 Studijního a zkušebního řádu pro studium v magisterských programech VŠB-TU Ostrava.

V Ostravě 28. dubna 2017 ....

Ráda bych na tomto místě poděkovala všem, kteří mi s prací pomohli a podporovali mě, protože bez nich by tato práce nevznikla. Jmenovitě bych ráda poděkovala vedoucímu bakalářské práce Ph.D. Petru Kovářovi za čas a trpělivost se kterou se mi ochotně věnoval.

Abstrakt

Tato práce se zabývá rozborem strategie v deskových hrách, ve kterých se figurka pohybuje po polích hrací desky na základě hodu kostkou. Cílem je podrobný rozbor pravděpodobnosti, že se figurka zastaví či nezastaví na jednotlivých polích hrací desky a stanovení strategie hry na základě výsledků. K dosažení cílů byly využity rekurentní rovnice, podařilo se stanovit jasné postupy výpočtů pravděpodobnosti polí a vysvětlit, co získané výsledky znamenají. Práce srovnává několik možných strategií v konkrétních hrách a poskytuje podklady k textu, který by mohl na výsledky navázat.

Klíčová slova: „Člověče, nezlob se!“, Monopoly, deskové hry, rekurentní rovnice, hod kostkou, pravděpodobnost

Abstract

This thesis deals with the analysis of board games. We explore strategies in games, where the peg moves based on rolling a dice. The main goal of the thesis is a detailed analysis of the likelihood, that a player will stop or will not stop at particular position of the board and the determination of a strategy based on the results. To achieve these goals clear methods are described to calculate the probabilities of certain board positions and we explain the meaning of the achieved results. The thesis compares several possible strategies of specific board games and provides a foundation for a possible subsequent thesis.

Key Words: Ludo, Monopoly, board games, reccurence relations, roll of the dice, probability

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Cílem práce je rozebrat strategii ve hrách, kde figurka postupuje po hracích polích herního plánu na základě hodu kostkou. V práci nejprve podrobně rozebereme pravděpodobnost, že se figurka hráče zastaví na jednotlivých polích hrací desky pro klasickou spravedlivou šestistěnnou kostku, jaká je využívána ve většině deskových her. Je snadné si uvědomit, že pro různá pole hracího plánu je různá i pravděpodobnost, že figurka na dané pole postoupí.

Tento rozbor nás přivede k problematice rekurentních rovnic, jež s tématem práce úzce souvisí a pomůže nám objasnit proč se pravděpodobnost polí ustálí na konkrétní limitní hodnotě.

Dále šestistěnnou hrací kostku nahradíme kostkou vícestěnnou nebo kostkou s předepsanými pravděpodobnostmi stěn a prozkoumáme jaké následky bude mít tento počin na průběh samotné hry a případné taktizování.

Na závěr práce se pokusíme aplikovat získané informace prakticky a budeme se věnovat analogickému rozboru her „Člověče, nezlob se!“ a Monopoly. Cílem práce je určit, zda a jak je možné v průběhu hry taktizovat na základě pravděpodobnostních jevů, a proto se během rozboru každé hry pokusíme stanovit strategii na základě určeného rozmístění hráčů v blízkosti naší figurky a v případě hry Monopoly ukážeme výhodnost některých polí a strategii na nich založenou.

1 Spravedlivá šestistěnná kostka

V první kapitole se budeme věnovat rozboru pravděpodobnosti jednotlivých polí hrací desky při hře se spravedlivou šestistěnnou kostkou, jakou známe například ze hry „Člověče, nezlob se!“. Výsledky zaneseme do grafů a zvážíme, proč mají grafy právě tuto podobu.

1.1 Pravděpodobnost polí 1 až 6

Uvažujme spravedlivou šestitstěnnou hrací kostku, tedy kostku, kde každá strana padá se stejnou pravděpodobností $p = \frac{1}{6}$. Jednotlivá pole hracího plánu označme $P_1, P_2, ..., P_n$ a pravděpodobnost, že se figurka zastaví na daném poli $p_1, p_2, ..., p_n$. Dále předpokládejme, že se figurka na počátku hry vždy nachází na výchozím poli P_0.

Pravděpodobnost polí P_1 až P_6 spočítáme

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{6}, \\
p_2 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{36}, \\
p_3 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} = \frac{49}{216}, \\
p_4 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{216} = \frac{343}{1296}, \\
p_5 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{216} + \frac{1}{6} \cdot \frac{343}{1296} = \frac{2401}{7776}, \\
p_6 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{49}{216} + \frac{1}{6} \cdot \frac{343}{1296} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2401}{7776} = \frac{16807}{46656}.
\end{aligned}
$$

Úvaha vedoucí k výpočtu pravděpodobností jednotlivých polí je následující:

Pravděpodobnost pole P_1, je jev kdy padne právě jedna strana kostky z šesti možných, tedy $\frac{1}{6}$.

Pravděpodobnost pole P_2 popišme pomocí sčítanců ve výpočtu. První sčítanec zleva je případ, kdy na kostce padla dvojka hned při prvním hodu, tedy opět právě jedna strana z šesti možných. Druhý sčítanec popisuje možnost, kdy v prvním i druhém hodu padlo číslo 1 a v součtu vzniká posun od dvě pole. Padla tedy buďto rovnou dvojka, a nebo dvakrát jednička, jednotlivé jevy budeme mezi sebou sčítat.

Pravděpodobnost třetího pole počítáme obdobně. První z možností je, že padlo číslo tři v jediném hodu. Druhý sčítanec popisuje případ, kdy jsme se na pole P_3 dostaneme z pole P_1 a třetí sčítanec reprezentuje jev, kdy figurka postoupila na pole P_3 z pole P_2. Při výpočtu pravděpodobnosti pole P_3 je již vidět, že pro získání hodnot dalších polí využijeme výsledné pravděpodobnosti polí předchozích.

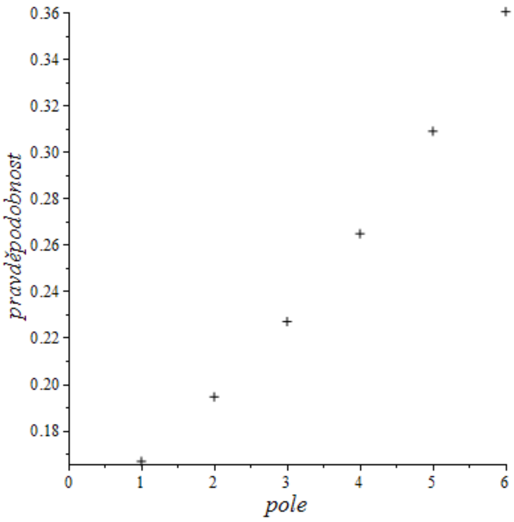
Na pole P_4 se dostaneme buďto z pole P_0 hodem čísla 4, nebo z pole P_1 hodem 3, nebo z pole P_2 hodem 2 a nebo z pole P_3 hodem 1.

Při výpočtu pravděpodobnosti polí 5 a 6 postupujeme obdobně.

Pokud bychom výpočet pravděpodobnosti polí P_1 až P_6 chtěli popsat jedinou rovnicí, pak

$$p_n = \frac{1}{6} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{6} \cdot p_i, \tag{1}$$

kde $n \in N$ a $n < 7$.



Obrázek 1: Pravděpodobnost, že se hráč zastaví na polích P_1 až P_6

Získané hodnoty zaneseme do grafu, který můžeme vidět na obrázku číslo 1. Je zřejmé, že pole s nejnižší pravděpodobností je pole P_1 a naopak s nejvyšší pravděpodobností se dostaneme na pole P_6. Není třeba složité úvahy, abychom si uvědomili, že na pole P_1 se můžeme dostat jen jedním způsobem, proto je pravděpodobnost p_1 nejmenší. Pro každé další pole P_1 až P_6 máme stále více kombinací, jak na něj může figurka postoupit. Jsme schopní určit, že na pole P_6 se můžeme dostat 32 různými způsoby, tedy nejvyšším možným počtem kombinací pro všechna pole, a proto je pravděpodobnost p_6 nejvyšší.

1.2 Pravděpodobnost polí 7 a vyšších

Rovnice pro výpočet pravděpodobnosti polí P_7 a vyšších bude vypadat následovně

$$p_n = \frac{1}{6} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot p_{n-2} + \frac{1}{6} \cdot p_{n-3} + \frac{1}{6} \cdot p_{n-4} + \frac{1}{6} \cdot p_{n-5} + \frac{1}{6} \cdot p_{n-6}. \tag{2}$$

Ve zkráceném zápisu

$$p_n = \sum_{i=1}^{6} p_{n-i}, \tag{3}$$

kde $n \in N$ a $n > 6$.

Například

$$\begin{aligned}
p_7 &= \frac{1}{6} \cdot p_6 + \frac{1}{6} \cdot p_5 + \frac{1}{6} \cdot p_4 + \frac{1}{6} \cdot p_3 + \frac{1}{6} \cdot p_2 + \frac{1}{6} \cdot p_1, \\
p_8 &= \frac{1}{6} \cdot p_7 + \frac{1}{6} \cdot p_6 + \frac{1}{6} \cdot p_5 + \frac{1}{6} \cdot p_4 + \frac{1}{6} \cdot p_3 + \frac{1}{6} \cdot p_2, \\
p_9 &= \frac{1}{6} \cdot p_8 + \frac{1}{6} \cdot p_7 + \frac{1}{6} \cdot p_6 + \frac{1}{6} \cdot p_5 + \frac{1}{6} \cdot p_4 + \frac{1}{6} \cdot p_3, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Při výpočtu pravděpodobnosti polí P_7 a vyšších vypadává z předchozího algoritmu pro výpočet $\frac{1}{6}$ jako první sčítanec, protože již není možné dosáhnout daného pole jediným hodem. Nejvzdálenější bod, ze kterého se na pole P_n můžeme dostat, je pole P_{n-6}, které je v rovnici (2) zachyceno jako součást posledního sčítance a nejbližší bod je pole P_{n-1}, jenž v rovnici (2) představuje součást prvního sčítance. Tímto způsobem jsme získali rovnici (2).

Úvahu vedoucí k rovnici (2) lze popsat i jinak. Pokud popíšeme hod h, při kterém padlo číslo n jako h_n a kombinaci hodů k, při které došlo k posunu o n polí jako k_n, pak výpočet pravděpodobnosti pole P_n můžeme popsat následující rovnicí

$$p_n = h_1 \cdot k_{n-1} + h_2 \cdot k_{n-2} + h_3 \cdot k_{n-3} + h_4 \cdot k_{n-4} + h_5 \cdot k_{n-5} + h_6 \cdot k_{n-6}.$$

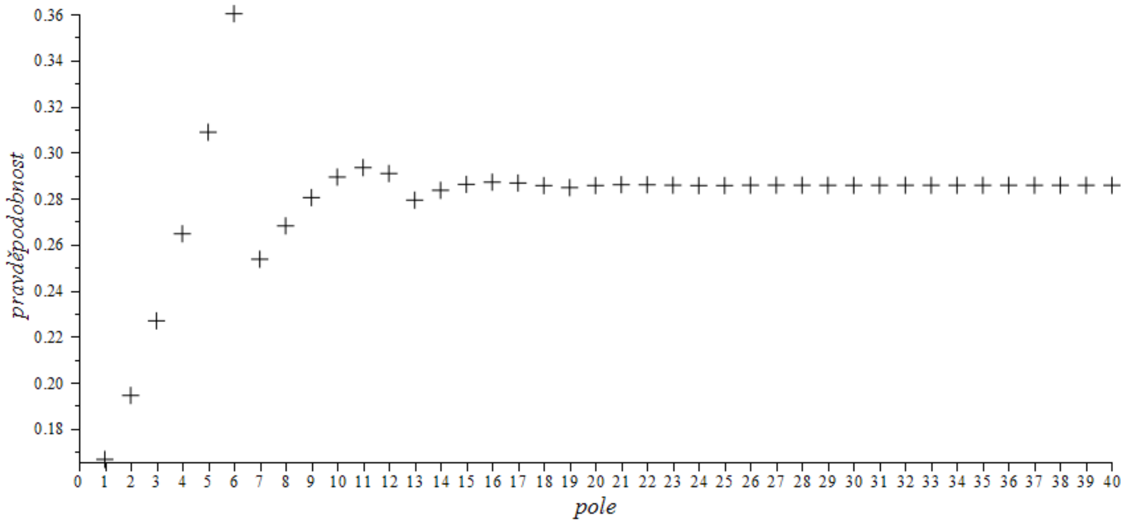
Jak bylo řečeno dříve, pravděpodobnost hodu jakéhokoli čísla je rovna $\frac{1}{6}$, tedy $h_1, h_2, ...h_6 = \frac{1}{6}$ a kombinace hodů vedoucí k posunu o n polí má pravděpodobnost p_n pole P_n. Po dosazení opět získáváme rovnici (2).

V grafu na obrázku číslo 2 jsou zachyceny hodnoty pravděpodobností prvních 40 polí hracího plánu získané pomocí rovnice (2). Pravděpodobnost prvních 6 polí známe z obrázku číslo 1. Poté jsou hodnoty do 20. pozice proměnlivé a nakonec konvergují přibližně k pravděpodobnosti $p = 0,285$. Těmito výsledky i hodnotou 0,285 a jejím významem se budeme zabývat později. Nyní stojí za zamyšlení, proč se v grafu na obrázku číslo 2 vyskytují poklesy pravděpodobností na polích P_7, P_{13} a P_{19}. Rozdělme si graf pomyslnými čárami po každém šestém poli. Zjišťujeme, že první pole za čárami jsou opět pole P_7, P_{13} a P_{19}. Chovají se tedy podobně jako pole P_1 a jejich pravděpodobnost je ve vymezené oblasti nejnižší.

Pokud nyní rovnici (2) přepíšeme do tvaru

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot a_{n-1} + \frac{1}{6} \cdot a_{n-2} + \frac{1}{6} \cdot a_{n-3} + \frac{1}{6} \cdot a_{n-4} + \frac{1}{6} \cdot a_{n-5} + \frac{1}{6} \cdot a_{n-6}, \tag{4}$$

zjišťujeme, že se nám povedlo sestavit rekurentní rovnici, kterou se pokusíme vyřešit v Kapitole 3.



Obrázek 2: Pravděpodobnost, že se hráč zastaví na poli P_n

2 Vícestěnná a nevyvážená kostka

V této kapitole se budeme krátce věnovat vícestěnným a nevyváženým hracím kostkám. Výsledky porovnáme s hodnotami pro šestisěnnou hrací kostku a zvážíme jaké následky má změna kostky na průběh hry.

2.1 Vícestěnná hrací kostka

Některé deskové hry využívají vícestěnné hrací kostky. Abychom mohli srovnat, jak rozdílný bude pohyb figurky po hrací desce pro takový případ, vyčíslíme pravděpodobnost, že se hráč zastaví na poli P_n alespoň pro jednu takovou kostku. Více se tímto tématem zabývat nebudeme, protože v žádné hře, jež budeme později podrobněji analyzovat, vícestěnnou hrací kostku nevyužijeme.

Existuje mnoho verzí hracích kostek s různým počtem stran a tvarem. Některé z nich však nejsou vyvážené, a proto pro naše účely vybereme pravidelný dvanáctistěn, tedy spravedlivou dvanáctistěnnou kostku, kde každá strana padá se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{12}$.

Při použití hrací kostky obsahující dvakrát vyšší počet stěn bychom se po hrací desce měli pohybovat rychleji. Abychom teto předpoklad mohli ověřit, musíme nejprve definovat pojem *střední hodnota.*

Definice 1 ***Střední hodnota náhodné veličiny***

Střední hodnota je parametr rozdělení náhodné veličiny, který je definován jako vážený průměr daného rozdělení. Střední hodnota náhodné veličiny X se značí $E(X)$. Má-li náhodná veličina X diskrétní rozdělení, kde $P[X = s_i] = p_i$ pro $i \in I$ nejvýše spočetnou množinu různých výsledků, pak

$$E(X) \quad = \quad \sum_i s_i p_i.$$

Nejprve určíme střední hodnotu posunu hráče po hrací desce pro šestistěnnou hrací kostku

$$\begin{aligned} E(X_6) &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že pro šestistěnnou hrací kostku je střední hodnota posunu hráče po hracím plánu 3,5 polí. Jinak řečeno, hráč se v průměru posune o 3,5 pole.

Pokud nyní určíme střední hodnotu posunu hráče pro dvanáctistěnnou hrací kostku

$$\begin{aligned} E(X_{12}) &= 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{12} + 6 \cdot \frac{1}{12} + 7 \cdot \frac{1}{12} + \\ &\quad + 8 \cdot \frac{1}{12} + 9 \cdot \frac{1}{12} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{12} + 12 \cdot \frac{1}{12} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

dojdeme k závěru, že se hráč v průměru posune o 6,5 pole a pohyb po hracím plánu je téměř dvakrát rychlejší. Náš předpoklad byl tedy správný.

Nyní se vraťme k výpočtu pravděpodobnosti, že hráč postoupí na jednotlivá pole. Protože se s dvanáctistěnnou kostkou můžeme jediným hodem dostat až na pole P_{12} spočítáme nejprve pravděpodobnost prvních dvanácti polí. Pokud budeme vycházet ze stejného postupu, jaký jsme využili v Kapitole 1, pak na základě rovnice (1) sestavíme rovnici pro výpočet pravděpodobnosti polí P_1 až P_{12} následovně

$$p_n = \frac{1}{12} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{12} \cdot p_i, \tag{5}$$

kde $n \in N$ a $n < 13$.
V rovnici (5) se oproti rovnici (1) změnily koeficienty z $\frac{1}{6}$ na $\frac{1}{12}$ tak, jak se změnila pravděpodobnost jednotlivých stran kostky.

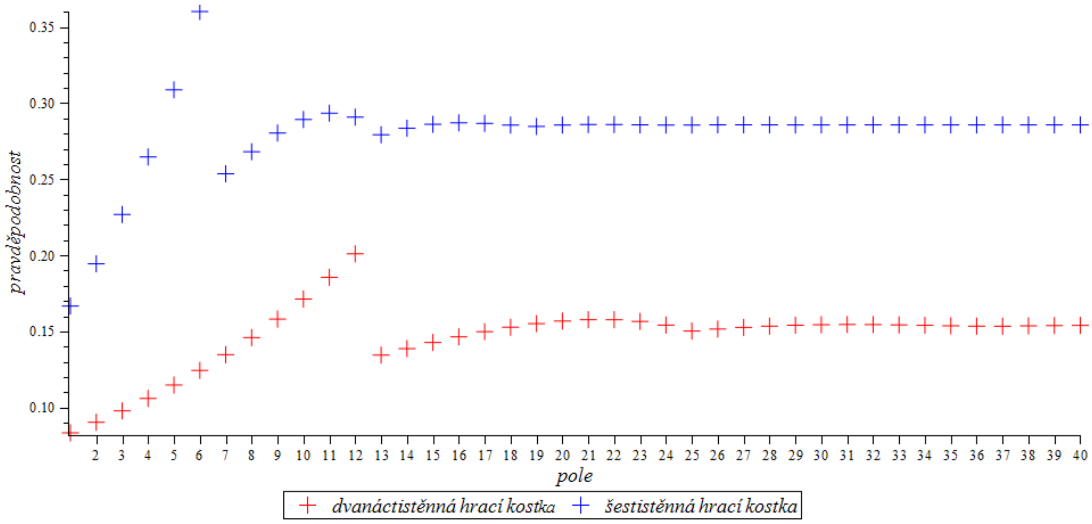
Pro výpočet pravděpodobnosti polí P_{13} a vyšších sestavíme rovnici, která vychází z rovnice (3), jež také najdeme v 1. kapitole, upravené pro dvanáctistěnnou kostku

$$p_n = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{12} \cdot p_{n-i}, \tag{6}$$

kde $n \in N$ a $n > 12$.
Opět vypadává první sčítanec, protože se na kýžené pole už nemůžeme dostat jediným hodem. Horní index sumy jsme, oproti rovnici (3), upravili na číslo 12, protože nejvzdálenější pole, ze kterého se na pole P_n můžeme dostat, je pole P_{n-12}.
Například výpočet pravděpodobnosti, že hráč postoupí na pole P_{13} vypadá následovně

$$\begin{aligned}
p_{13} &= \frac{1}{12} \cdot p_{n-1} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-2} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-3} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-4} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-5} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-6} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-7} + \\
&\quad + \frac{1}{12} \cdot p_{n-8} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-9} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-10} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-11} + \frac{1}{12} \cdot p_{n-12} \\
&= \frac{1}{12} \cdot p_{12} + \frac{1}{12} \cdot p_{11} + \frac{1}{12} \cdot p_{10} + \frac{1}{12} \cdot p_9 + \frac{1}{12} \cdot p_8 + \frac{1}{12} \cdot p_7 + \frac{1}{12} \cdot p_6 + \frac{1}{12} \cdot p_5 \frac{1}{12} \cdot p_4 + \\
&\quad + \frac{1}{12} \cdot p_3 + \frac{1}{12} \cdot p_2 + \frac{1}{12} \cdot p_1.
\end{aligned}$$

Graf na obrázku číslo 3 srovnává pravděpodobnost, že hráč postoupí na jednotlivá pole pro dvanáctistěnnou (červeně) a šestistěnnou (modře) hrací kostku. V grafu můžeme vidět, že při hře s dvanáctistěnnou kostkou se pravděpodobnost jednotlivých polí snižuje a hodnoty se ustálí mnohem později, než jak tomu je při hře se šestistěnnou kostkou. Nižší pravděpodobnost polí je způsobena tím, že jsme rozšířili uniformní pravděpodobností prostor z $\Omega_1 = [1, 6]$ na $\Omega_2 = [1, 12]$. Jinak řečeno, je „na výběr“ z většího počtu možností, co může padnout, a tak bude pravděpodobnost každého pole nižší. Pokud bychom s dvanáctistěnnou kostkou hráli hru, kde kupujeme některá pole nebo nás zajímá, na která pole hráč v prvním kole postoupí či je naopak projde bez zastavení, umožní nám delší průběh procesu, kdy se hodnoty ustalují takticky vybírat pole, protože pro hrací desku o 40 polích tento proces pokrývá téměř všechna pole prvního kola.



Obrázek 3: Srovnání pravděpodobnosti, že hráč postoupí na pole P_n, pro dvanáctistěnnou a šestistěnnou hrací kostku

2.2 Nevyvážená 6stěnná hrací kostka

V mnoha deskových hrách získáme výhodu, pokud nám na kostce padne číslo 6. Někdy proto, abychom prošli všemi poli hrací desky co možná nejrychleji, jindy si přejeme nasadit další figurku, a nebo ve hrách jako jsou například Dostihy chceme opustit pole, na kterém jsme „uvězněni“. Zvažme, jak by se změnil průběh hry, pokud by některý hráč používal nevyváženou hrací kostku, tedy kostku s předepsanými pravděpodobnostmi stěn, kde by číslo 6 padalo dvakrát pravděpodobněji než kterákoli jiná strana.

Abychom mohli vypočítat pravděpodobnost jednotlivých polí, musíme poupravit způsob výpočtu. Stanovme si proto koeficienty k_1 až k_6, které budou popisovat pravděpodobnost každé strany kostky, že padne právě ona. Lze snadno určit, že

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 \quad = \quad \frac{1}{7}$$

a strana s číslem 6 padá dvakrát pravděpodobněji, proto

$$k_6 \quad = \quad \frac{2}{7}.$$

Pro ověření víme, že alespoň jedna strana kostky padne, a proto když sečteme pravděpodobnost všech stran, respektive všechny koeficienty k_1 až k_6, získáme pravděpodobnost $p = 1$.

Rovnice popisující výpočet pravděpodobnosti, že hráč postoupí na pole P_n, pro prvních 6 polí bude mít následující podobu

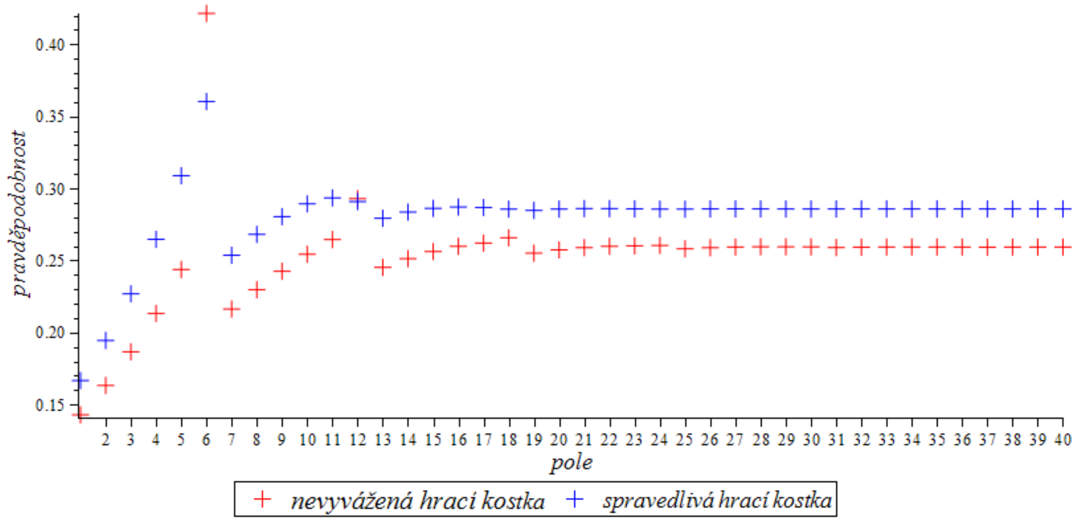
$$p_n = k_n + \sum_{i=1}^{n-1} k_i \cdot p_i, \tag{7}$$

kde $n \in N$ a $n < 7$.
A výpočet pravděpodobnosti polí P_7 a vyšších popíšeme

$$p_n = \sum_{i=1}^{6} k_i \cdot p_{n-i}, \tag{8}$$

kde $n \in N$ a $n > 6$.

V grafu na obrázku číslo 4 můžeme vidět výsledné pravděpodobnosti polí pro nevyváženou hrací kostku s dvakrát větší pravděpodobností, že padne číslo 6 (červeně), ve srovnání se spravedlivou hrací kostkou (modře). Z grafu můžeme vyčíst, že kromě pole P_6 a P_{12} se pravděpodobnost všech polí pro nevyváženou kostku snížila. Bylo snadné uhádnout, že pravděpodobnost pole P_6 bude nejvyšší a vzestup hodnot na polích $P_{6\cdot n}$, respektive pravidelně po 6 polích, se dal očekávat také. Viditelný výkyv hodnot totiž nastává nejen na polích P_6 a P_{12}, ale i na poli P_{18} a mírně i na P_{24}. Po zkušenostech z podkapitoly 2.1 o vícestěnné hrací kostce není velkým překvapením, že pravděpodobnost jednotlivých polí klesla. I když je počet stran kostky stále stejný, technicky jsme uniformní pravděpodobnostní prostor opět rozšířili, a to z $\Omega_1 = [1, 6]$ na $\Omega_2 = [1, 7]$. Tuto skutečnost si můžeme představit jako sedmistrannou hrací kostku, která má vždy jednu stranu s číslem 1 až 5 a dvě strany s číslem 6.



Obrázek 4: Srovnání pravděpodobnosti, že hráč postoupí na pole P_n, pro nevyváženou a spravedlivou hrací kostku

Na závěr ověřme, zda se hráč používající nevyváženou kostku, bude po hrací desce pohybovat opravdu rychleji než ostatní. Proto pro takovou kostku určíme střední hodnotu posunu hráče po hracím poli

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{2}{7} = \\
&= \frac{27}{7} \doteq 3,86.
\end{aligned}
$$

Nepoctivý hráč se po hrací desce v průměru posune o více než 3,5 pole, což mu v mnoha hrách poskytne výhodu.

Pokud my sami používáme výše popsanou nevyváženou hrací kostku, svůj účel splní. Nicméně, pokud bychom si během hry všimli, že soupeř nedá svou oblíbenou kostku z ruky, můžeme například při hře Monopoly, využít skutečnosti, že víme, na kterých polích se bude vyskytovat nejčastěji a tato pole nakoupit.

3 Lineární rekurentní rovnice s konstantními koeficienty řádu k a jejich řešení

3.1 Rekurentní rovnice

[1] *Rekurentní rovnice je rekurentní vztah, který vyjadřuje závislost každého dalšího členu posloupnosti jako lineární kombinaci předchozích členů.*

To znamená, že jestliže a_k je počet způsobů, jak provést proceduru za pomoci k objektů pro $k = 0, 1, 2, ...$, potom je rekurentní rovnice vztah, který vyjadřuje a_n jako funkci předešlých a_k, kde $k < n$.

Jeden z nejjednodušších rekurentních vztahů je například dán rovnicí

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Pokud chceme řešit rekurentní rovnice, což znamená, být schopni vyčíslit hodnotu a_n pouze jako funkci proměnné n, nikoliv pomoci předchozích členů, pak je zapotřebí mít dostatek informací. Například, když budeme řešit rekurentní vztah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, pak je informace $a_0 = 2$ nedostatečná. Avšak pokud přidáme $a_1 = 3$, jsme schopni vyčíslit, že

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + a_0 = 3 + 2 = 5, \\
a_3 &= a_2 + a_1 = 5 + 3 = 8, \\
a_4 &= a_3 + a_2 = 8 + 5 = 13, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

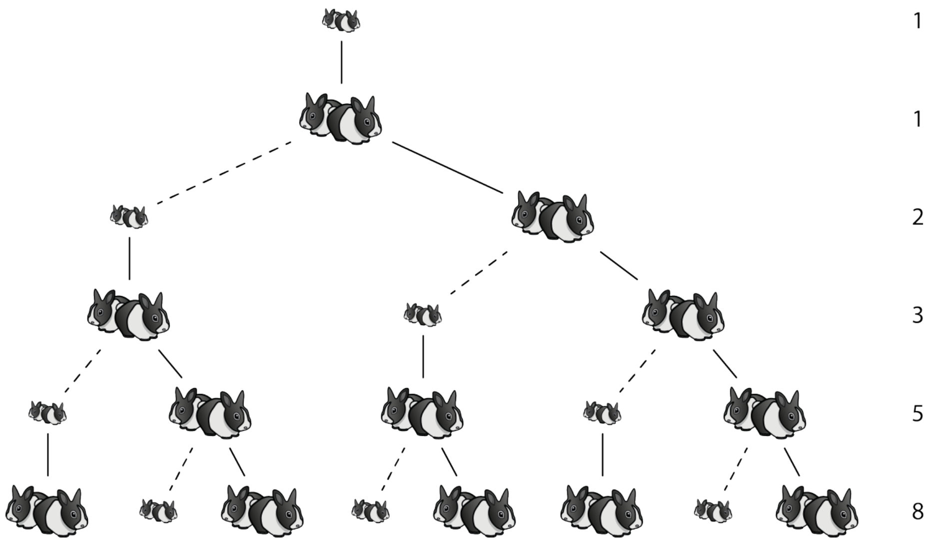
Tyto informace nazýváme *počáteční podmínky.*

Dalším jednoduchým a často uváděným příkladem využití rekurentních rovnic jsou „Králíci na ostrově“, neboli Fibonacciho posloupnost.

Příklad 1

Tento problém popsal v třináctém století Leonardo Pisánský známý jako Fibonacci. Mladý pár králíků (jeden králík od každého pohlaví) je umístěn na ostrov. Pár králíků se nemůže rozmnožit dokud nedosáhne dospělosti, to trvá dva měsíce. Až se tak stane, každý pár plodí nový pár každý další měsíc. Předpokládejme, že žádný pár nikdy nezemře. Situaci ilustruje obrázek číslo 5.

Otázka zní: Jaký je počet párů králíků na ostrově v n-tém měsíci?



Obrázek 5: Fibonacciho králíci

Řešení:

Pokud budeme chtít zjistit počet párů a_n v n-tém měsíci, získáme jej součtem počtu dospělých párů na ostrově a_{n-1} a počtu párů, které jsou schopné plodit, tedy páry, které se narodily před dvěma měsíci. Jejich počet vyjádříme jako a_{n-2}. Výsledný vztah bude vypadat následovně

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}. \tag{9}$$

Pokud dodáme počáteční podmínky $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, tedy v prvním a druhém měsíci se na ostrově nacházel jeden pár, jsme schopni určit počet králíků v jakémkoli měsíci n. Tímto způsobem získáme n-té Fibonacciho číslo z Fibonacciho posloupnosti. ■

Řešením rekurentní rovnice (9) je vztah

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{10}$$

Jak rekurentní rovnice řešit, ukážeme v následující podkapitole.

3.2 Řešení rekurentních rovnic

Rekurentní rovnice mohou být řešeny pomocí iterace nebo jiné z ad hoc technik. Nicméně, důležitá třída rekurentních rovnic může být řešena explicitně a systematicky. Jsou to lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty, které vyjadřují člen jako sekvenci lineárních kombinací předchozích členů.

Definice 2 *Lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty je rekurentní rovnice ve tvaru*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k},$$

kde $c_1, c_2, ..., c_k$ *jsou reálná čísla a* $c_k \neq 0$.

Rekurentní rovnice je *lineární*, když je její pravá strana součtem předchozích členů posloupnosti násobených koeficienty c_i. Dále je *homogenní*, pokud je tvořena pouze členy c_ia_i. O rekurentní rovnici *s konstantními koeficienty* se jedná, když jsou všechny koeficienty c_i konstanty, a nakonec rovnice je řádu k, pokud je každý člen vyjádřen pomocí k předcházejících členů posloupnosti.

Následuje příklad několika případů lineárních homogenních rekurentních rovnic řádu k s konstantními koeficienty.

Příklad 2
Rekurentní vztah $P_n = 11,1 \cdot P_{n-1}$ je lineární homogenní rekurentní rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty.

Rekurentní vztah $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ je lineární homogenní rekurentní rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

Rekurentní vztah $a_n = a_{n-5}$ je lineární homogenní rekurentní rovnice 5. řádu s konstantními koeficienty. ■

Nyní několik příkladů rovnic, jež nejsou lineární homogenní rekurentní rovnicí řádu k s konstantními koeficienty:

Příklad 3
Rekurentní vztah $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ není lienární, protože je druhý člen umocněn na druhou.

Rekurentní vztah $H_n = 2H_{n-1} + 1$ není homogenní, protože je zde přičtena 1 a člen H_n, tedy není tvořen výhradně kombinací předchozích členů posloupnosti.

Rekurentní vztah $B_n = nB_{n-1}$ nemá konstantní koeficienty, protože koeficient závisí na n. ■

Lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty jsou studovány ze dvou důvodů. Prvním je jejich častý výskyt při modelování problémů. Druhým důvodem je skutečnost, že tyto rovnice umíme řešit systematicky.

3.3 Řešení lineárních homogenních rekurentních rovnic řádu k s konstantními koeficienty

Základním způsobem, jak řešit lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty, je hledání řešení ve tvaru $a_n = r^n$, kde r je konstanta.

Důležité je, že $a_n = r^n$ je řešením rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$, pouze tehdy, když platí

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + ... + c_k r^{n-k}. \tag{11}$$

Když jsou obě strany rovnice (11) vyděleny r^{n-k} a pravá strana je odečtena od levé, získáme rovnici

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_{k-1} - c_k = 0. \tag{12}$$

Tudíž posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = r^n$ bude řešením rekurentní rovnice pouze tehdy, když r je řešením rovnice (12), kterou nazýváme *charakteristická rovnice* rekurentní rovnice. Řešení charakteristické rovnice nazýváme *kořeny charakteristické rovnice.* Jak si později ukážeme, kořeny charakteristické rovnice mohou být použity k vyjádření explicitního vztahu pro n-tý člen pro všechna řešení rekurentní rovnice.

Nyní si uveďme větu platící speciálně pro lineární homogenní rekurentní rovnice 2. řádu.

Věta 1 *Nechť jsou c_1 a c_2 reálná čísla. Předpokládejme, že rovnice*

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

má dva rozdílné kořeny r_1 a r_2. Potom je posloupnost $\{a_n\}$ řešením rekurentní rovnice

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{13}$$

právě tehdy, když

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n,$$

kde $n = 0, 1, 2...$ a α_1, α_2 jsou konstanty.

Důkaz. Bude zapotřebí dvou důkazů k ověření Věty 1.

Nejprve budeme muset ukázat, že pokud r_1 a r_2 jsou kořeny charakteristické rovnice a α_1, α_2 jsou konstanty, pak také posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, je řešením rekurentní rovnice.

Poté dokážeme, že když je sekvence $\{a_n\}$ řešením, pak pro určité konstanty α_1, α_2 existují kořeny r_1 a r_2, takové, že platí $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$.

Nyní ověříme, zda pokud platí $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ řešení rekurentní rovnice.

Jestliže r_1 a r_2 jsou kořeny rovnice $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, potom

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$$

a

$$r_2^2 = c_1 r_2 + c_2.$$

S využitím těchto rovnic vyvodíme následující

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= a_n
\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, je řešení rekurentní rovnice (13).

K vyjádření kořenů rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$, kde $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ pro $n = 0, 1, 2, ...$ a pro konstanty α_1, α_2, předpokládejme, že $\{a_n\}$ je řešení rekurentní rovnice, kde jsou zadány počáteční podmínky $a_0 = C_0, a_1 = C_1$. Využijeme metodu neurčitých koeficientů a ukážeme, že existují konstanty α_1, α_2 a sekvence $\{a_n\}$, kde $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, splňující počáteční podmínky $a_0 = C_0, a_1 = C_1$.

K tomu je zapotřebí určit, že

$$\begin{aligned}
a_0 &= C_0 = \alpha_1 + \alpha_2, \\
a_1 &= C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2.
\end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice budeme řešit pro neznámé α_1, α_2. Z první rovnice plyne, že

$$\alpha_2 = C_0 - \alpha_1.$$

Vložením tohoto výrazu do druhé rovnice získáme

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_1.$$

Tudíž

$$C_1 \;=\; \alpha_1(r_1 - r_2) + C_0 r_2.$$

To dokazuje, že

$$\alpha_1 \;=\; \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2}$$

a

$$\alpha_2 \;=\; C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{C_1 - C_0 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2},$$

kde tato vyjádření pro α_1, α_2 závisí na skutečnosti, že $r_1 \neq r_2$. (Pokud by se $r_1 = r_2$, pak by nebyly splněny předpoklady Věty 1.).

S výše vyjádřenými hodnotami α_1, α_2, posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, splňuje obě počáteční podmínky.

Již víme, že $\{a_n\} = \{\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n\}$ jsou řešení rekurentní rovnice $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ a splňují počáteční podmínky pro $n = 0$ a $n = 1$.

Protože se jedná o řešení soustavy dvou lineárních rovnic s regulární čtvercovou maticí, víme, že existuje jediné jednoznačně určené řešení lineární homogenní rekurentní rovnice 2. řádu s dvěma počátečními podmínkami. Z toho plyne, že tato dvě řešení jsou stejná, tedy

$$a_n \;=\; \alpha_1 r_1^n \;+\; \alpha_2 r_2^n$$

pro všechna celá čísla $n \geq 0$.

Tímto jsme prokázali, že řešení lineární homogenní rekurentní rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty musí být ve tvaru $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, kde α_1, α_2 jsou konstanty. ■

Kořeny charakteristické rovnice lineární homogenní rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty mohou být i komplexní čísla. Věta 1 platí i v tomto případě.

Na následujícím příkladu ukážeme řešení rekurentních rovnic na základě Věty 1.

Příklad 4

Co je řešením rekurentního vztahu $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, kde $a_0 = 2$ a $a_1 = 7$?

Řešení:

Nejprve najdeme charakteristickou rovnici zadané rekurentní rovnice

$$r^n \;=\; c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$$

$$
\begin{aligned}
r^n &= r^{n-1} + 2r^{n-2} \\
r^n - r^{n-1} - r^{n-2} &= 0 \\
r^2 - r - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Charakteristickou rovnicí dané rekurentní rovnice je tedy rovnice

$$r^2 - r - 2 \;=\; 0$$

a kořeny charakteristické rovnice jsou

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 2, \\
r_2 &= -1.
\end{aligned}
$$

Tudíž, posloupnost $\{a_n\}$ je řešením pouze tehdy, když platí

$$a_n \;=\; \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n,$$

pro určité konstanty α_1 a α_2.

Z počátečních podmínek plyne, že

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 2 = \alpha_1 + \alpha_2, \\
a_1 &= 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1).
\end{aligned}
$$

Řešením těchto dvou rovnic získáme hodnoty konstant

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 3, \\
\alpha_2 &= -1.
\end{aligned}
$$

Tudíž, řešením lineární homogenní rekurentní rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ s počátečními podmínkami $a_0 = 2$ a $a_1 = 7$ je posloupnost $\{a_n\}$, kde

$$a_n \;=\; 3 \cdot 2^n - (-1)^n.$$

■

3.4 Řešení rekurentní rovnice (4)

V podkapitole číslo 3.3 jsme se naučili řešit lineární rekurentní homogenní rovnice řádu k s konstantními koeficienty. Aplikujme nyní nové znalosti na rovnici, kterou se nám povedlo sestavit v Kapitole 1.

Přepíšeme-li rovnici (4)

$$a_n = \frac{1}{6}\cdot a_{n-1} + \frac{1}{6}\cdot a_{n-2} + \frac{1}{6}\cdot a_{n-3} + \frac{1}{6}\cdot a_{n-4} + \frac{1}{6}\cdot a_{n-5} + \frac{1}{6}\cdot a_{n-6}$$

do obecného tvaru

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + c_3a_{n-3} + c_4a_{n-4} + c_5a_{n-5} + c_6a_{n-6},$$

umíme určit, že se jedná o lineární homogenní rekurentní rovnici 6. řádu s konstantními koeficienty. Dále je zřejmé, že hodnoty koeficientů c_1 až c_6 jsou stejné, tedy

$$c_1 = c_2 = ... = c_6 = \frac{1}{6} = c.$$

Víme, že $a_n = r^n$ je řešení rekurentního vztahu

$$a_n = ca_{n-1} + ca_{n-2} + ca_{n-3} + ca_{n-4} + ca_{n-5} + ca_{n-6}$$

právě tehdy, když platí

$$r^n = cr^{n-1} + cr^{n-2} + cr^{n-3} + cr^{n-4} + cr^{n-5} + cr^{n-6}.$$

Pokud nyní z rovnice vytkneme r^{n-6} a převedeme členy na stejnou stranu, získáváme charakteristickou rovnici

$$r^6 - cr^5 - cr^4 - cr^3 - cr^2 - cr^1 - cr^0 = 0,$$

zpětným dosazením hodnoty koeficientu dosáhneme rovnice

$$r^6 - \frac{1}{6}r^5 - \frac{1}{6}r^4 - \frac{1}{6}r^3 - \frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{6}r^1 - \frac{1}{6}r^0 = 0.$$

a po vynásobení číslem 6 upravíme charakteristickou rovnici do tvaru

$$6r^6 - r^5 - r^4 - r^3 - r^2 - r^1 - 1 = 0. \tag{14}$$

Pomocí software Maple, získáme přibližné analytické řešení rovnice (14).
Řešením jsou hodnoty šesti charakteristických kořenů r_1 až r_6

$$\begin{aligned}
r_1 &\doteq -0,670332047603097,\\
r_2 &\doteq -0,375695199225260 - 0,570175161011412i,\\
r_3 &\doteq -0,375695199225260 + 0,570175161011412i,\\
r_4 &\doteq 0,294194556360142 - 0,668367097443301i,\\
r_5 &\doteq 0,294194556360142 + 0,668367097443301i,\\
r_6 &= 1.
\end{aligned}$$

Získali jsme 2 reálné a 4 komplexní kořeny a nyní si můžeme všimnout, že reálný kořen $r_6 = 1$ jsme mohli z rovnice (14) snadno odhadnout.

Z Věty 1 víme, že posloupnost $\{a_n\}$ je řešením rekurentní rovnice

$$a_n = ca_{n-1} + ca_{n-2} + ca_{n-3} + ca_{n-4} + ca_{n-5} + ca_{n-6},$$

právě tehdy, když

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \alpha_6 r_6^n,$$

kde $n = 1, 2..., 6$ a $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$ jsou konstanty.

Tyto konstanty získáme metodou neurčitých koeficientů pro stanovené počáteční podmínky, jimiž jsou pravděpodobnosti p_1 až p_6 prvních šesti polí P_1 až P_6 hracího plánu
$a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{7}{36}$, $a_3 = \frac{49}{216}$, $a_4 = \frac{343}{1296}$, $a_5 = \frac{2401}{7776}$, $a_6 = \frac{16807}{46656}$.

Pro nalezení konstant vyřešíme soustavu šesti lineárních rovnic s kořeny $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_6$

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad a_1 = \tfrac{1}{6} = \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 + \alpha_3 r_3^1 + \alpha_4 r_4^1 + \alpha_5 r_5^1 + \alpha_6 r_6^1,\\
n = 2: &\quad a_2 = \tfrac{7}{36} = \alpha_1 r_1^2 + \alpha_2 r_2^2 + \alpha_3 r_3^2 + \alpha_4 r_4^2 + \alpha_5 r_5^2 + \alpha_6 r_6^2,\\
n = 3: &\quad a_3 = \tfrac{49}{216} = \alpha_1 r_1^3 + \alpha_2 r_2^3 + \alpha_3 r_3^3 + \alpha_4 r_4^3 + \alpha_5 r_5^3 + \alpha_6 r_6^3,\\
n = 4: &\quad a_4 = \tfrac{343}{1296} = \alpha_1 r_1^4 + \alpha_2 r_2^4 + \alpha_3 r_3^4 + \alpha_4 r_4^4 + \alpha_5 r_5^4 + \alpha_6 r_6^4,\\
n = 5: &\quad a_5 = \tfrac{2401}{7776} = \alpha_1 r_1^5 + \alpha_2 r_2^5 + \alpha_3 r_3^5 + \alpha_4 r_4^5 + \alpha_5 r_5^5 + \alpha_6 r_6^5,\\
n = 6: &\quad a_6 = \tfrac{16807}{46656} = \alpha_1 r_1^6 + \alpha_2 r_2^6 + \alpha_3 r_3^6 + \alpha_4 r_4^6 + \alpha_5 r_5^6 + \alpha_6 r_6^6.
\end{aligned}$$

Po vyřešení soustavy rovnic, opět s využitím Maple, získáváme hodnoty šesti konstant

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &\doteq 0,142857142795785,\\
\alpha_2 &\doteq 0,142857142881755 + 3,10703407446766 \cdot 10^{-11} i,\\
\alpha_3 &\doteq 0,142857142881755 - 3,10703546224644 \cdot 10^{-11} i,\\
\alpha_4 &\doteq 0,142857142820353 + 8,37696578770419 \cdot 10^{-12} i,\\
\alpha_5 &\doteq 0,142857142820353 - 8,37693803212858 \cdot 10^{-12} i,\\
\alpha_6 &= 0,285714285700000.
\end{aligned}
$$

Nyní si můžeme všimnout, že imaginární části komplexních čísel se blíží nule a proto jsou konstanty α_1 až α_5 „téměř“ reálná čísla.

Řešením lineární homogenní rekurentní rovnice 6. řádu s konstantními koeficienty, respektive řešením rovnice (4) je tedy rovnice

$$
\begin{aligned}
a_n \doteq\ & 0,14 \cdot (-0,67)^n + (0,14 + 3,11 \cdot 10^{-11} i) \cdot (-0,38 - 0,57i)^n +\\
& (0,14 - 3,11 \cdot 10^{-11} i) \cdot (-0,38 + 0,57i)^n + (0,14 + 8,38 \cdot 10^{-12} i) \cdot (0,29 - 0,66i)^n +\\
& (0,14 - 8,38 \cdot 10^{-12} i) \cdot (0,29 + 0,66i)^n + 0,2857 \cdot 1^n. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Jinak řečeno, získali jsme vztah pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$.

Všimněme si, že zde opět figuruje hodnota přibližně 0,285 a to u posledního sčítance. Tato hodnota byla zmiňována v Kapitole 1, kde byla zachycena v grafu na obrázku číslo 2, jako pravděpodobnost, že se figurka zastaví na poli P_{20} a dalších. V kapitole 4 se k této hodnotě budeme vracet.

4 Limita posloupnosti

4.1 Konvergence posloupnosti k pravděpodobnosti A

Definice 3 ***Limita posloupnosti***

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má limitu* A*, pokud se jejími hodnotami můžeme k* A *libovolně přiblížit. Tedy pro každé kladné číslo* ε *platí, že existuje nějaký člen posloupnosti, od kterého jsou její hodnoty od* A *vzdáleny méně, než o* ε*.*

Zapsáno symbolicky

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0) : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jinak řečeno, limita posloupnosti je matematický pojem, vyjadřující, že se hodnoty dané posloupnosti blíží libovolně blízko k nějakému číslu. Právě toto číslo je pak označováno jako limita. Skutečnost zapíšeme $\lim a_n = A$ případně $a_n \to A$.

V tuto chvíli nás zajímá jaká je limitní hodnota A, ke které posloupnost pravděpodobností $\{a_n\}$ z Kapitoly 1 konverguje. Dalším úkolem bude správný odhad pozice n od které se hodnoty pravděpodobností blíží k A pro libovolně zvolené dostatečně malé ε.

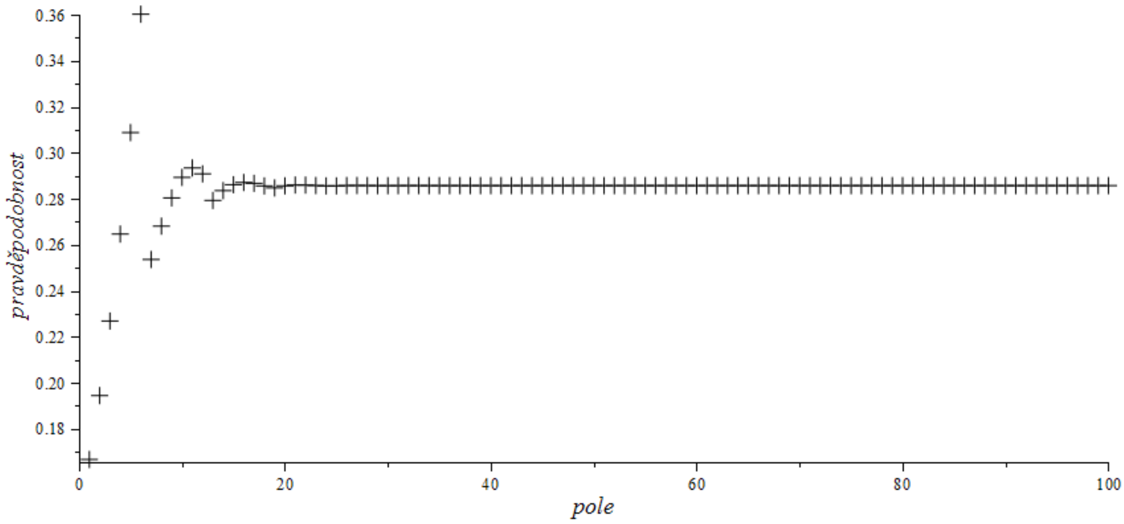
Nejprve se problém pokusíme vyřešit úvahou. Jak bylo řečeno v Kapitole 1, pravděpodobnost má tendenci konvergovat přibližně k hodnotě 0,285. Ověřme tuto úvahu na grafu pravděpodobností pro prvních 100 polí. Po nahlédnutí do obrázku 6 se naše úvaha potvrzuje. Opět se zdá, že po překročení pole P_{20} hodnoty konvergují k pravděpodobnost $p = 0,285$. Nyní ověříme úvahu výpočtem vycházejícím z Definice 3.

K výpočtu limitní hodnoty posloupnosti $\{a_n\}$ využijeme rovnice (15), kterou se nám povedlo sestavit ve 3. kapitole a určíme její limitu pro n blížící se nekonečnu.
Pokud na rovnici (15) nahlédneme

$$\begin{aligned} a_n \quad \doteq \quad & 0,14 \cdot (-0,67)^n + (0,14 + 3,11 \cdot 10^{-11} i) \cdot (-0,38 - 0,57i)^n + \\ & (0,14 - 3,11 \cdot 10^{-11} i) \cdot (-0,38 + 0,57i)^n + (0,14 + 8,38 \cdot 10^{-12} i) \cdot (0,29 - 0,66i)^n + \\ & (0,14 - 8,38 \cdot 10^{-12} i) \cdot (0,29 + 0,66i)^n + 0,2857 \end{aligned}$$

můžeme určit, že všechny její sčítance, kromě posledního, se za daných podmínek budou blížit k nule, protože základ exponenciálního výrazu je v absolutní hodnotě menší než jedna. Dále stojí za zmínku, že poslední sčítanec je zaokrouhlen na čtyři desetinná místa a přesný výsledek určíme později. Získáváme tedy limitu posloupnosti $\{a_n\}$

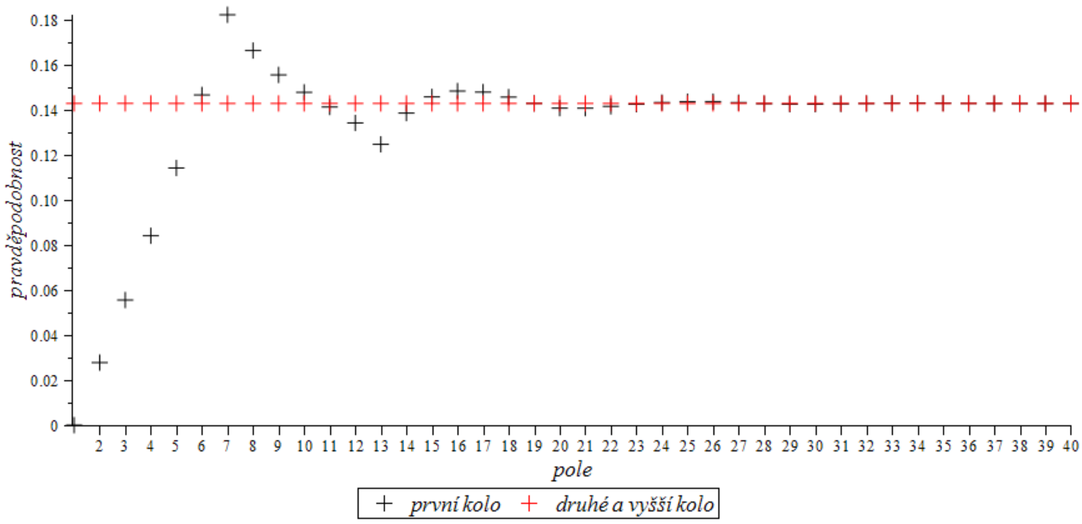
$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad \doteq \quad 0,2857.$$



Obrázek 6: Pravděpodobnosti pro prvních 100 polí

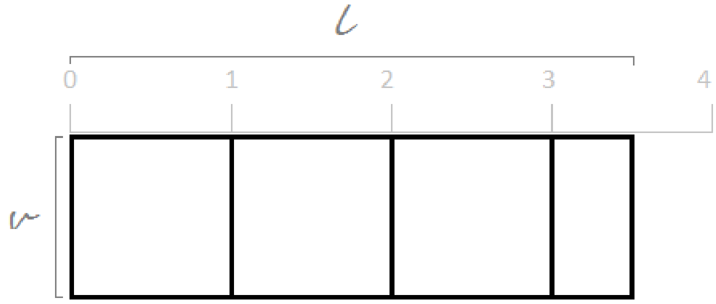
Nyní můžeme říct, že posloupnost konverguje ke konstantě $A \doteq 0,2857$.

Nicméně, hodnota $A \doteq 0,2857$ není náhodná. Z 2. kapitoly víme, že střední hodnota posunu hráče po hracím poli je tedy 3,5 polí. Jinak řečeno, hráč se v průměru posune o 3,5 pole. Tento fakt bude platný v již zmiňovaném případě, kdy jsou hodnoty pravděpodobností ustáleny. Protože v tuto chvíli není potřeba rozhodnout, od kterého pole se hodnoty dají považovat za ustálené, uvažujme druhé nebo vyšší kolo hry, kdy se hodnoty pravděpodobností zřetelně blíží limitní hodnotě, jak můžeme vidět na obrázku číslo 7. Za těchto podmínek, můžeme střední hodnotu posunu figurky po hracím poli považovat za konstantní veličinu.



Obrázek 7: Provnání pravděpodobností v prvním a vyšších kolech

Abychom nemuseli zavádět definice obsahující integrální výpočty, představme si obdélník o délce odpovídající průměrnému posunu figurky na hrací desce $l = 3{,}5$ políčka, obsahu odpovídajícímu pravděpodobnosti, že se figurka vyskytne na této ploše $S = 1$ a výšce v odpovídající pravděpodobnosti každého pole, že se figurka postaví právě na něj. Popsaný obdélník ilustruje obrázek 8.



Obrázek 8: Plocha obdélníka ilustrujícího určení přesné limitní hodnoty

Na základě této představy snadno odvodíme pravděpodobnost každého pole v druhém a vyšším kole. Upravíme-li vzorec pro výpočet obsahu obdelníka $S = l \cdot v$ do tvaru $v = \frac{S}{l}$ a dosadíme známe hodnoty $v = 1/\frac{7}{2}$. Získáme pravděpodobnost pole P_n v druhém a vyšším kole.

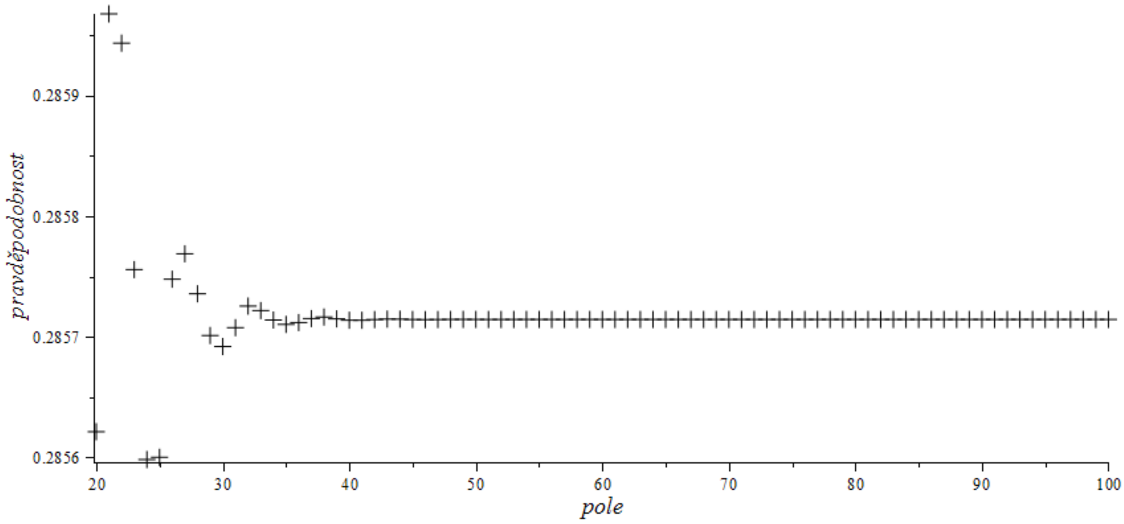
$$v = p_n = \frac{2}{7}$$

Získali jsme přesnou limitní hodnotu posloupnosti $\{a_n\}$ $A = \frac{2}{7}$. Jinak řečeno zjistili jsme, jaké hodnotě se blíží pravděpodobnost každého pole od určité pozice n. Dále bychom rádi určili, od kterého pole n můžeme považovat hodnoty pravděpodobností polí za ustálené. To určíme v následující podkapitole.

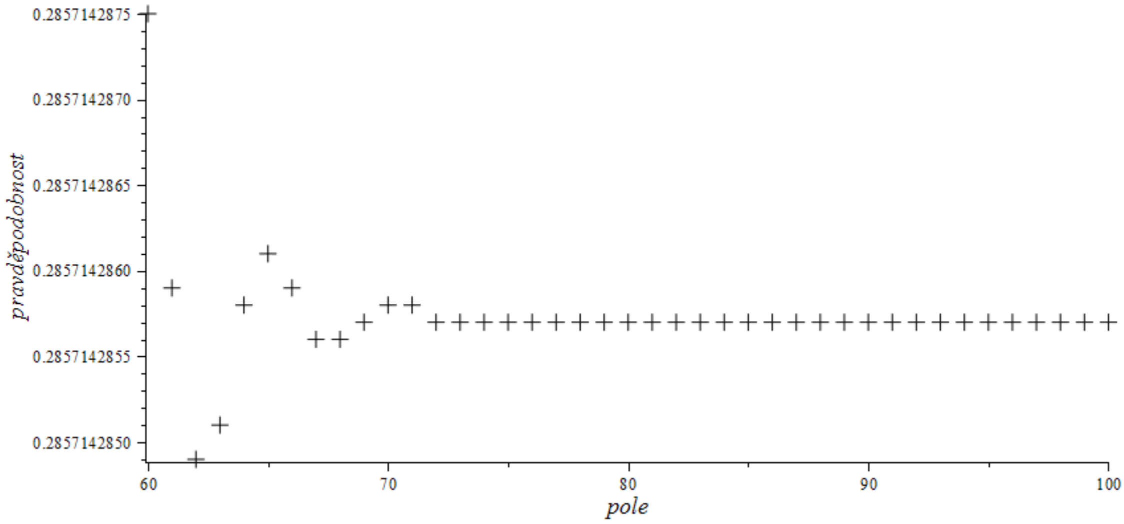
4.2 Rychlost kovergence

Nyní chceme zjistit, od které pozice n se pravděpodobnost pole nebude lišit o více než zvolené dostatečně malé číslo ε.

V tuto chvíli by bylo vhodné podrobněji se zaměřit na podobu grafu za 20. pozicí. Ač se na první pohled zdá, že hodnoty jsou již neměnné, stále kovergují k hodnotě $\frac{2}{7}$. To ilustrují obrázky číslo 9 a 10, kde můžeme pozorovat měnící se měřítko na ose y.

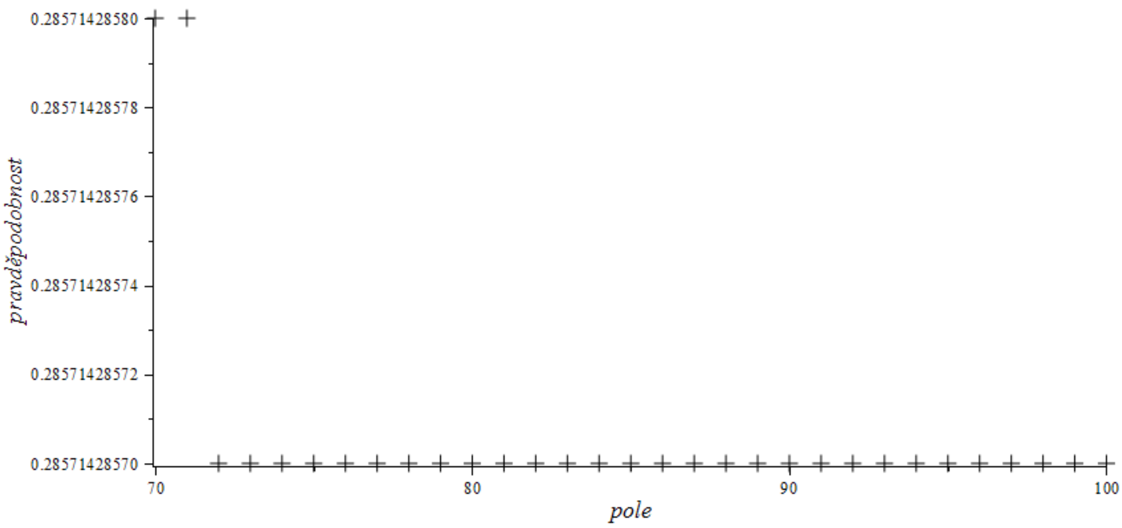


Obrázek 9: Vybrané hodnoty pravděpodobností od pole P_{20}



Obrázek 10: Vybrané hodnoty pravděpodobností od pole P_{60}

Graf na obrázku číslo 11, který zobrazuje hodnoty pravděpodobností od pole P_{70} vypadá jinak. Na základě zaokrouhlování využitý software od 72. pozice nerozlišuje pravděpodobnost jednotlivých polí.



Obrázek 11: Vybrané hodnoty pravděpodobností od pole P_{70}

Pokud bychom zvolili ε na základě grafu 11 bylo by rovno 10^{-11} a hledaná pozice $n = 72$. Nicméně toto ε je až příliš malé a neměli bychom co počítat, zvolme proto jiné libovolné dostatečně malé ε.

4.2.1 Dolní odhad pozice n

Pro dolní odhad pozice n musíme určit od jaké pozice n pro pevně zvolené ε platí $|a_n - A| < \varepsilon$ (viz Definice 3).

Vyjdeme z rovnice

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \alpha_6 r_6^n.$$

V předchozí kapitole jsme zjistili, že pro hodnotu $\alpha_6 r_6^n$ platí $a_6 = \frac{2}{7}$ a $r_6 = 1$.

Proto

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \frac{2}{7}.$$

Pro splnění podmínky $|a_n - A| < \varepsilon$, pak sestavíme rovnici

$$|a_n - A| = \left|\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \frac{2}{7} - A\right| < \varepsilon$$

tedy pro $A = \frac{2}{7}$ platí

$$\left|a_n - \frac{2}{7}\right| = \left|\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \frac{2}{7} - \frac{2}{7}\right| < \varepsilon$$

a získáváme

$$\left|a_n - \frac{2}{7}\right| = |\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n| < \varepsilon.$$

Protože pro vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem platí

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Můžeme psát

$$\left|\sqrt[5]{\alpha_1 r_1^n \cdot \alpha_2 r_2^n \cdot \alpha_3 r_3^n \cdot \alpha_4 r_4^n \cdot \alpha_5 r_5^n}\right| \leq \frac{|\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n|}{5}$$

a nerovnici upravíme do tvaru

$$\left|\sqrt[5]{\alpha_1 r_1^n \cdot \alpha_2 r_2^n \cdot \alpha_3 r_3^n \cdot \alpha_4 r_4^n \cdot \alpha_5 r_5^n}\right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Nyní několika úpravami vyjádříme neznámou n

$$\begin{aligned}
|\alpha_1 r_1^n \cdot \alpha_2 r_2^n \cdot \alpha_3 r_3^n \cdot \alpha_4 r_4^n \cdot \alpha_5 r_5^n| &< \left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5 \\
|r_1^n \cdot r_2^n \cdot r_3^n \cdot r_4^n \cdot r_5^n| &< \frac{\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5}{|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5|} \\
n \ln |r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5| &< \ln\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5}{|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5|}\right) \\
n &> \frac{\ln\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5}{|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \alpha_5|}\right)}{\ln |r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5|}.
\end{aligned}$$

Dosadíme-li hodnoty z rovnice (15)

$$\begin{aligned}
n &> \frac{\ln\left(\frac{\left(\frac{\epsilon}{5}\right)^5}{|0{,}14 \cdot (0{,}14+3{,}11\cdot 10^{-11}i)\cdot(0{,}14-3{,}11\cdot 10^{-11}i)\cdot(0{,}14+8{,}38\cdot 10^{-12}i)\cdot(0{,}14-8{,}38\cdot 10^{-12}i)|}\right)}{\ln |(-0,67) \cdot (-0,38 - 0,57i) \cdot (-0,38 + 0,57i) \cdot (0,29 - 0,66i) \cdot (0,29 + 0,66i)|}, \\
n &> \frac{\ln\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5}{|0{,}538\cdot 10^{-4} - 1{,}598\cdot 10^{-20}i|}\right)}{\ln |-0,1634|}
\end{aligned}$$

získáme vzorec pro dolní odhad pozice n, od které se pravděpodobnost polí neliší více, než o libovolně zvolené dostatečně malé ε

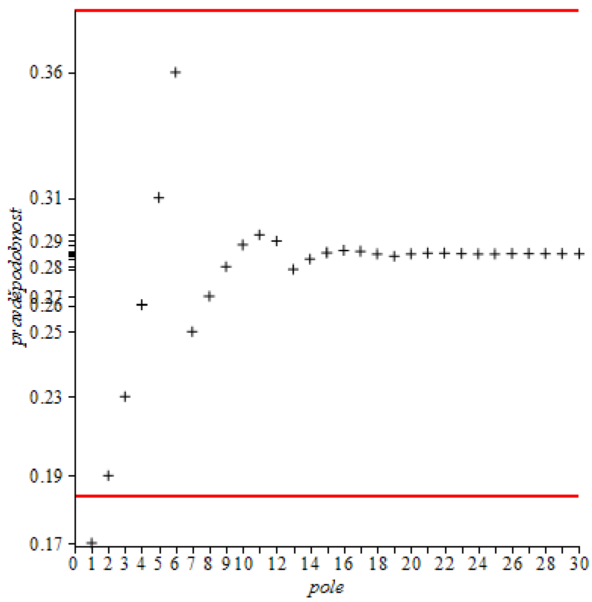
$$n > \frac{\ln\left(\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5\right) + 9,831}{-1,811}. \tag{16}$$

Nyní do nerovnice (16) postupně dosadíme $\varepsilon_1 = 10^{-1}, \varepsilon_2 = 10^{-2}, \varepsilon_3 = 10^{-3}, \varepsilon_4 = 10^{-6}$ a porovnáme výsledné hodnoty n s grafy pravděpodobností.

Pro $\varepsilon_1 = 10^{-1}$ platí $n > 5,49$, nejbližší celočíselná hodnota je 6 a bude nás zajímat chování grafu od pole P_6. To znamená, že od 6. pozice by se měly hodnoty pravděpodobností na ose y pohybovat v rozmezí $\frac{2}{7} - 10^{-1} > P_n > \frac{2}{7} + 10^{-1}$. Na obrázku číslo 12 je toto rozpětí vymezeno červenými čárami a na první pohled tak vidíme, že grafické znázornění odpovídá vypočtenému výsledku.

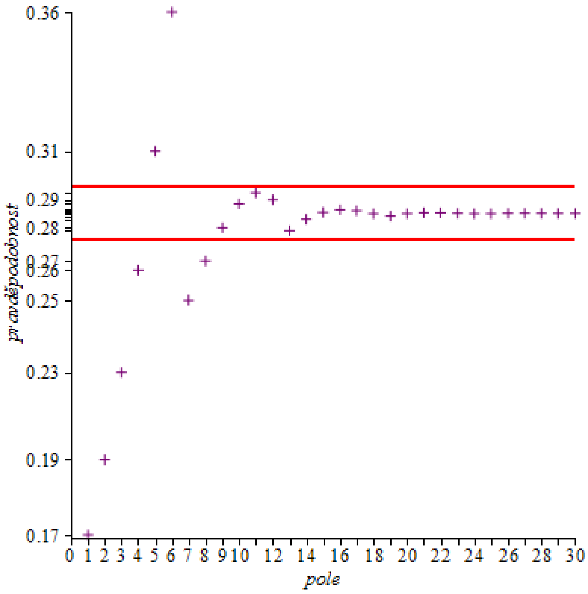
To samé nyní proveďme pro hodnoty

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= 10^{-2}, n > 11,91, \\ \varepsilon_3 &= 10^{-3}, n > 18,34, \\ \varepsilon_4 &= 10^{-6}, n > 37,61. \end{aligned}$$



Obrázek 12: Pravděpodobnost polí v porovnání s $\varepsilon = 10^{-1}$

Na obrázku číslo 13 by se hodnoty pravděpodobností měly od pole P_{12} opět pohybovat uvnitř oblasti vymezené čarami. Stejně by se na obrázku číslo 14 měly chovat hodnoty od pozice P_{19} a stejný výsledek budeme očekávat i u obrázku číslo 15 od pozice P_{38}.

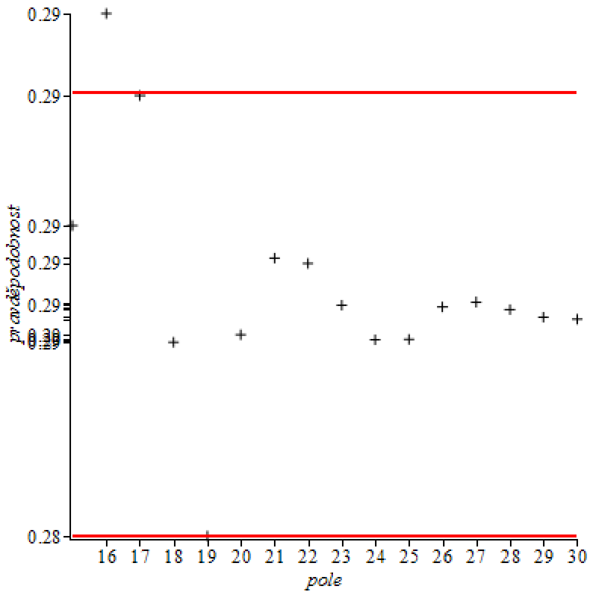


Obrázek 13: Pravděpodobnost polí v porovnání s $\varepsilon = 10^{-2}$

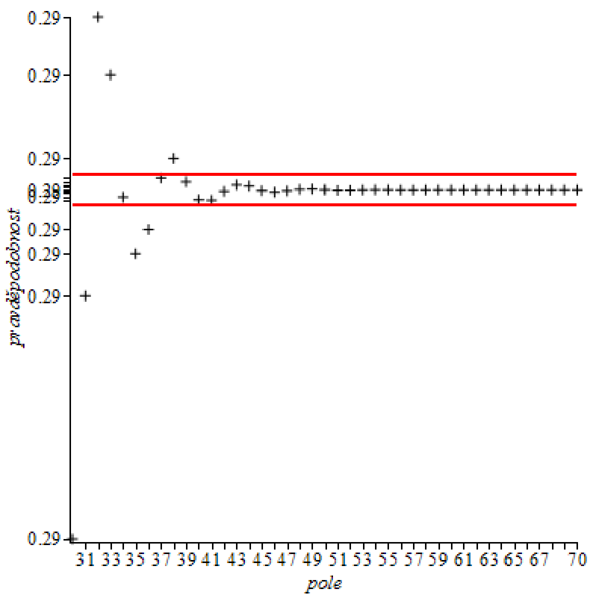
Výsledné grafy naše očekávání potvrdily, můžeme říct, že pro dolní odhad hodnoty n pro libovolně zvolené číslo ε platí nerovnost

$$n \quad > \quad \frac{\ln\left(\left(\frac{\varepsilon}{5}\right)^5\right) + 9,831}{-1,811}$$

a posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k $A = \frac{2}{7}$.



Obrázek 14: Pravděpodobnost polí vybraných v porovnání s $\varepsilon = 10^{-3}$



Obrázek 15: Pravděpodobnost vybraných polí v porovnání s $\varepsilon = 10^{-6}$

5 Aplikace na konkrétních hrách

Při aplikaci našich znalostí na konkrétních hrách budeme rozlišovat dva případy:

1. Pozice soupeře je známá, anebo
2. pokud neznáme polohu soupeře, případně není důležitá, budeme říkat, že se soupeř „blíží z nekonečna“.

V podkapitole číslo 5.1, kde se budeme zabývat hrou „Člověče, nezlob se!“, narazíme jen na první případ, tedy pozice soupeře bude vždy známá. Druhý případ, kdy se soupeř blíží z nekonečna, podrobněji rozebereme v podkapitole číslo 5.2 na hře Monopoly.

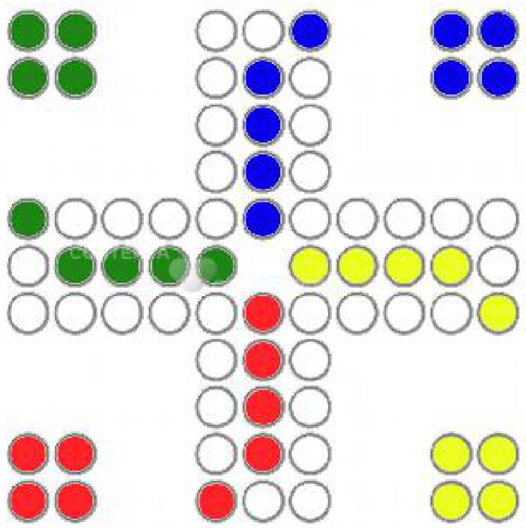
5.1 „Člověče, nezlob se!“

Hra „Člověče, nezlob se!“, oblíbená mezi dětmi i dospělými, má prastarou historii. Její základ najdeme v dávné indické hře Pačísí, která se hraje už v 7. století n. l. . Do Evropy doputuje dlouhou cestou přes Srí Lanku, Persii a následně Palestinu a Španělsko, ovšem příliš se zde neuchytí. Její sériovou výrobu zahájí až v roce 1914 německý obchodník Josef Friedrich Schmidt a uvede ji na trh pod dnešním názvem „Mensch, ärgere dich nicht“, tedy „Člověče, nezlob se!“. Dnes známou hru proslavili především ranění vojáci, kteří si jí krátili čas během 1. světové války.[2]

Připomeňme si nyní její pravidla:

> *Cílem hry „Člověče, nezlob se!“ je dovést všechny své figurky do domečku. Na začátku hry se umístí figurky do rohů hrací desky označených danou barvou hráče.*
> *Hráči postupně střídavě házejí kostkou, dokud na kostce nepadne číslo 6. Pokud padne, tak hráč může nasadit svoji figurku na startovní pole, což je vždy na první pole napravo od rohu, kde stojí figurky. Poté může hráč ještě jednou házet kostkou a svoji figurku posune o tolik polí, kolik ok padne na kostce.*
> *Dále hráči střídavě házejí kostkou. Padle-li opět číslo 6, hráč může házet ještě jednou, nebo může nasadit další figurku do hry.*
> *Figurka může být z pole na hrací desce vyhozena, postoupí-li figurka jiného hráče na její pole. V tom případě musí jít figurka zpět do počátečního postavení a čeká, až padne číslo 6.*
> *Hráč, který jako první dovede své figurky do domečku, vyhrává.* [3]

Ilustraci hrací desky hry „Člověče, nezlob se!“ můžeme vidět na obrázku číslo 16. Z výše citovaných pravidel tušíme, že tentokrát nás bude zajímat, jaká je pravděpodobnost, že žádný ze soupeřů nepostoupí na pole, na němž se právě nachází naše figurka. To proto, abychom nebyli ze hry vyhozeni zpět do počátečního postavení. Jinak řečeno, dosud jsme počítali, jaká je



Obrázek 16: Hrací deska hry „Člověče, nezlob se!“

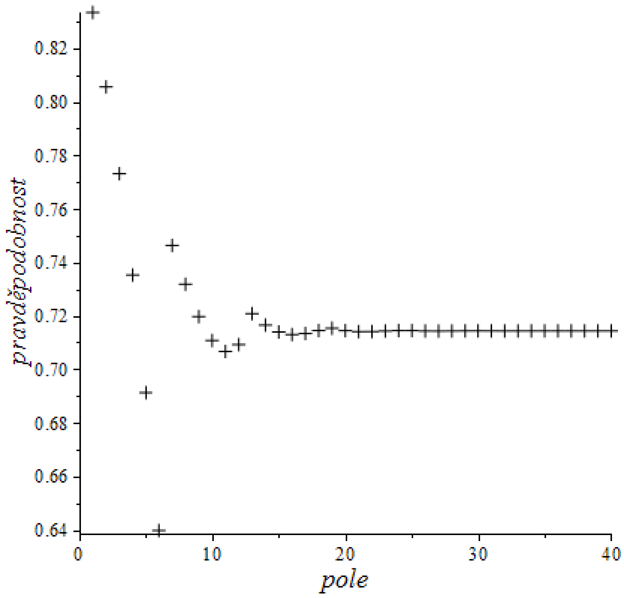
pravděpodobnost, že se figurka na poli P_n zastaví, nyní naopak chceme znát pravděpodobnost, kdy hráč na daném poli nezastaví.

Uvažujme jednotlivé hráče nejprve separátně. Potřebujeme znát opačný jev k pravděpodobnosti každého z polí, že se na něm hráč zastaví, tedy doplněk původního jevu. Pro každého hráče budeme pravděpodobnost, že se na poli P_n nezastaví, počítat následovně.

$$
\begin{aligned}
p_1' &= 1 - p_1 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \\
p_2' &= 1 - p_2 = 1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36} \\
p_3' &= 1 - p_3 = 1 - \frac{49}{216} = \frac{167}{216} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Graf pravděpodobnosti, že se figurka na poli P_n nezastaví (pro jednoho hráče), můžeme vidět na obrázku číslo 17.

Když zaneseme do grafu všechny čtyři hráče, kteří vycházejí z každého desátého pole, a předpokládáme, že se každému hráči povede hodit číslo 6 už v prvním kole, a tak okamžitě nastoupit do hry, můžeme na obrázku číslo 18 vidět, že se „vlny“ pravděpodobností jednotlivých hráčů překrývají, budou se tedy vzájemně ovlivňovat. Pokud chceme znát pravděpodobnost, že se na poli P_n nikdo nezastaví, kdy uvažujeme všechny hráče zároveň, vypočítáme ji jako pravděpodobnost, kdy na pole nešlápne modrý ani zelený ani červený ani žlutý hráč, tedy žádný z hráčů. Jednotlivé pravděpodobnosti mezi sebou pak násobíme. Jak se pravděpodobnosti pro jednotlivé hráče při výpočtu vzájemně překrývají ilustruje obrázek číslo 19.

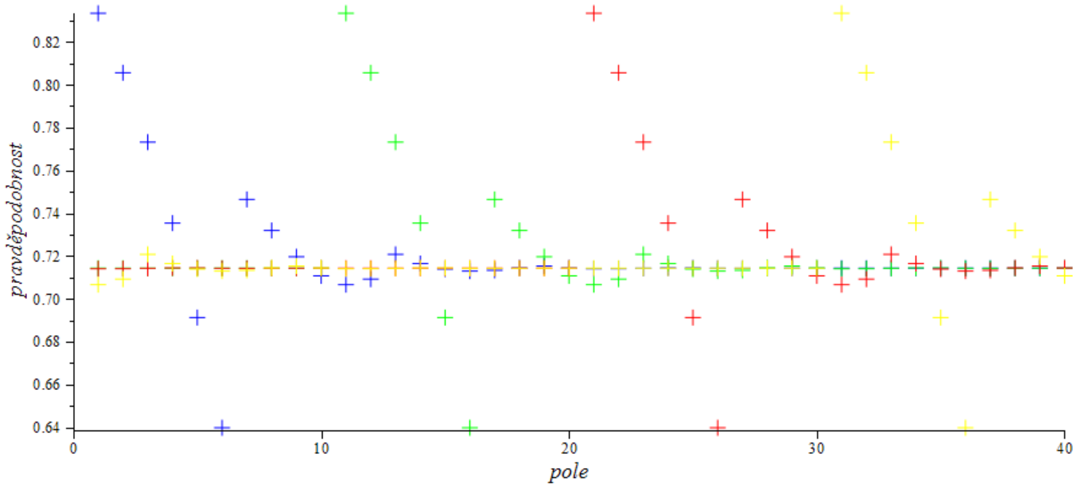


Obrázek 17: Pravděpodobnost, že se hráč na poli P_n nezastaví, pro jednoho hráče

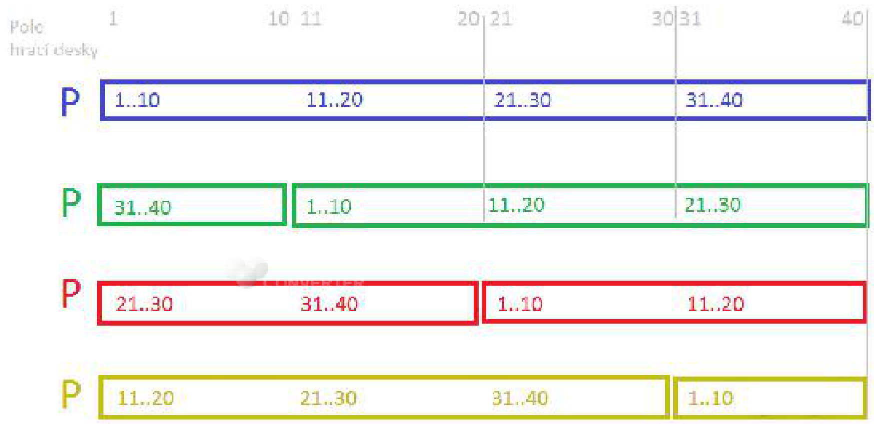
Výpočet pravděpodobnosti, že se na poli P_n nezastaví ani jeden z hráčů vypadá následovně (Pro zjednodušení, značme ve výpočtech počátečními písmeny z anglických názvů barev jednotlivých hráčů, tedy modrý B, červený R, zelený G a žlutý Y.)

$$\begin{aligned}
p_1 &= (1 - p_{B_1}) \cdot (1 - p_{G_{31}}) \cdot (1 - p_{R_{21}}) \cdot (1 - p_{Y_{11}}) \\
p_2 &= (1 - p_{B_2}) \cdot (1 - p_{G_{32}}) \cdot (1 - p_{R_{22}}) \cdot (1 - p_{Y_{12}}) \\
p_3 &= (1 - p_{B_3}) \cdot (1 - p_{G_{33}}) \cdot (1 - p_{R_{23}}) \cdot (1 - p_{Y_{13}}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

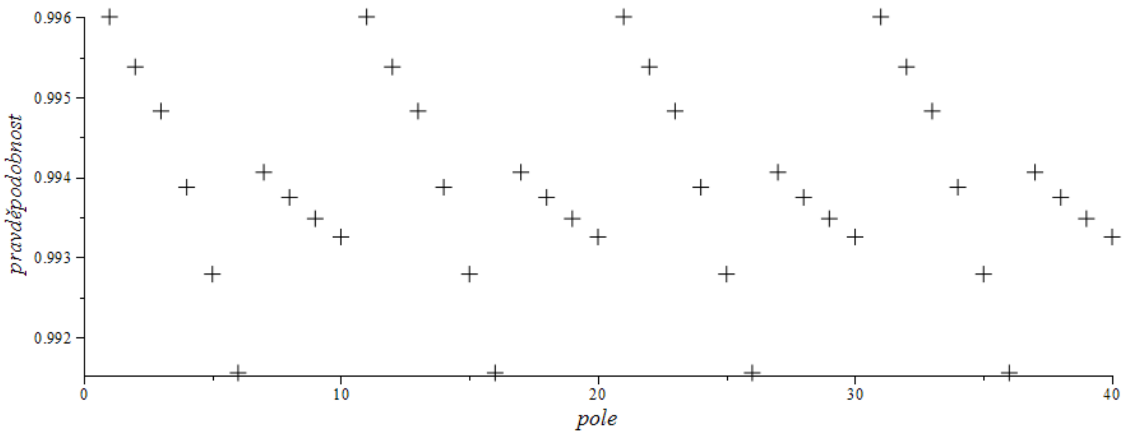
Výsledný graf pravděpodobnosti, že na pole P_n nepostoupí žádný ze 4 hráčů, můžeme vidět na obrázku číslo 20. V grafu jsou zřetelné výrazné vzestupy hodnot, které jsou způsobeny nástupem nového hráče do hry. Z předchozích kapitol víme, že v části grafu pro pole P_1 až P_6, pravděpodobnost polí stoupala. Proto budou hodnoty pravděpodobností v těchto oblastech pro doplňkový jev naopak klesat.



Obrázek 18: Pravděpodobnost, že se hráči na poli P_n nezastaví separátně pro jednotlivé hráče



Obrázek 19: Ilustrace výpočtu pravděpodobnosti pro čtyři hráče vycházející z každého desátého pole



Obrázek 20: Pravděpodobnost, že se žádný ze čtyř hráčů nezastaví na poli P_n

Pojďme si hrát

Nyní na několika příkladech ukažme, jak se naše znalosti dají aplikovat na konkrétní případy. Nejdříve shrňme část pravidel hry, mírně upravenou pro naše účely:

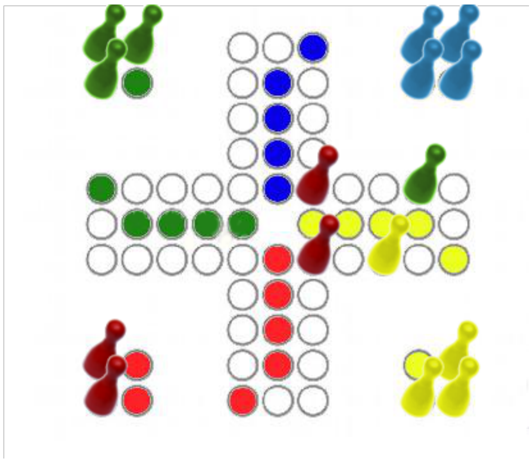
„Pokud hráči při hodu kostkou padne číslo 6 a dosud nemá ve hře všechny figurky, je nucen nasadit novou. Poté hází znova a táhne novu figurkou o tolik polí, jaké číslo padlo na kostce. Pokud padne číslo 6 dvakrát, nasadí figurku a hází znova. Táhne pak novou figurkou o tolik polí, kolik je součet šestky a výsledku následujícího hodu. Pokud by 6 padla i potřetí, hráč v tomto kole končí, nesmí znova házet ani táhnout kteroukoli figurkou."

Pravidla jsou takto poupravená, protože bychom jen těžko určili, zda se hráč rozhodl nasadit novou figurkou, nebo táhnout jinou a navíc, jsou pravidla v této formě často používána.

Nyní v několika příkladech rozebereme konkrétní situace, jež mohou během hry nastat. Na základě výsledků se pak pokusíme vyvodit obecný závěr.

V následujících příkladech, budeme předpokládat, že naše barva je červená.

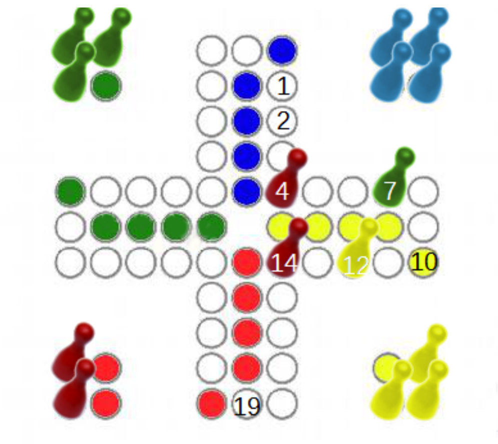
Příklad 5
(a) Zadání příkladu 5 (a) je obrázek číslo 21.



Obrázek 21: Zadání příkladu 5 (a)

Tento příklad si podrobně rozebereme, všechna další řešení budou vycházet z obdobného postupu a jejich komentář bude kratší.

Jako první pole P_1 uvažujeme první pole za startovací pozicí modrého hráče, protože pokud při jeho hodu padne číslo 6, může naše figurky ohrozit. Za poslední pole považujme poslední pole před naším domečkem, protože nás zajímá jaká je pravděpodobnost, že se na pole před figurkou, která má k domečku blíže, nikdo nepostaví. Na základě této informace se později můžeme rozhodovat, zda se raději přiblížit domečku nebo unikat druhou figurkou, jež máme



Obrázek 22: Očíslování polí v příkladě 5 (a)

ve hře. A protože jsou první a poslední pole od sebe vzdálená 18 pozic, poslední pole budeme značit P_{19}. Jak jsou pole očíslována ilustruje obrázek číslo 22.

Očíslovanou část hrací desky vyobrazme v tabulce jako řadu polí a zaneseme do ní aktuální výskyt hráčů i jejich startovací políčka. (Hráče budeme i tabulkách značit počátečními písmeny anglických názvů barev.)

Pole	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Hráči				R			G			Start Y		Y		R					

Nyní je třeba určit terminologii, která bude užívána v celé kapitole. Pokud je řečeno, že některý hráč ovlivňuje či má vliv, respektive neovlivňuje či nemá vliv na určitá pole, pak je tím myšlena skutečnost, zda se na poli zastaví respektive nezastaví a dále je vyčísleno jaká je pravděpodobnost tohoto jevu. Také musíme určit význam slov „za“ a „před“ v souvislosti se hrou. V prvním příkladě, je na obrázku číslo 21 zelený hráč za žlutým a žlutý hráč před zeleným.

V prvním příkladě rozeberme, jak jednotliví protihráči ovlivňují pole hrací desky:

Modrý

Nejnižší pole, jež může modrý hráč ovlivnit je pole P_1, a to v případě, že mu alespoň jednou padne na kostce číslo 6. Pokud padne číslo 6 jednou a poté číslo v rozmezí 1 až 5, ovlivňuje modrý hráč pole P_1 až P_5, každé s pravděpodobností $P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. Pokud modrému hráči padne 6 dvakrát, pak ovlivňuje pole P_1 až P_{11} každé s pravděpodobností $P = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$.

Vyobrazme v tabulce, která pole a jak jsou ovlivněna modrým hráčem:

<table>
<tr><td>Pole</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr>
<tr><td>Pravděpodobnost</td><td colspan="5">$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$</td><td>0</td><td colspan="5">$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$</td></tr>
</table>

Pokud bychom chtěli tabulku popsat slovy: Na polích P_1 až P_5 se může hráč vyskytnout v případě, že hodí jednou 6 a poté číslo 1 až 5.
Na poli P_6 se hráč zastavit nemůže, protože neexistuje žádná kombinace platných hodů, která by jej na toto políčko dostala. Pokud padne 6 jednou, pak se dostane nejdále na pole P_5, pokud padne 6 dvakrát, nejbližší pole, na kterém se může zastavit je pole P_7.
Na polích P_7 až P_{11} se hráč zastaví v případě, že hodil dvakrát 6 a poté číslo 1 až 5.

Zelený

Pokud zelený hráč hodí 6 a nasadí novou figurku, tak i v případě, že číslo 6 padne dvakrát, je stále natolik vzdálený, že pole, na kterých se nacházíme, nebo se na ně můžeme posunout nijak neovlivní, proto tento případ nezapočítáme. Pole, která nás zajímají, obsadí zelený hráč jen v případě, kdy hodí číslo 1 až 5. Pak se může zastavit na polích P_8 až P_{12} na každém s pravděpodobností $\frac{1}{6}$.

Zaneseno do tabulky:

Pole	8	9	10	11	12
Pravděpodobnost	$\frac{1}{6}$				

Slovy: Zelený hráč se na polích P_8 až P_{12} může vyskytnout s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Další pole neovlivní, pokud padne 6, bude muset nasadit novou figurku, která nebude mít vliv na pole, jež nás zajímají.

Žlutý

Pokud se žlutému hráči povede hodit číslo 6, pak nasadí novou figurku a ovlivní pole P_{11} až P_{15} s pravděpodobností $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$. V případě, že hodí 6 dvakrát po sobě, bude mít tento jev vliv na pole P_{11} až P_{19} pro každé s pravděpodobností $\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$.

Pokud žlutý hráč nehodí číslo 6 ani jednou, táhne figurkou, kterou už má na hracím poli P_{12} a ovlivňuje pole P_{13} až P_{17}, každé s pravděpodobností $\frac{1}{6}$.

V tabulce:

Pole	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Pravděpodobnost	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$		$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$	

Na polích P_{11} a P_{12} se žlutý hráč může objevit pokud hodí 6 jednou a poté číslo v rozmezí 1 až 5.
Na polích P_{13} až P_{15} se bude vyskytovat, když hodí jednou 6 a poté číslo v rozmezí 1 až 5. Nebo pokud při prvním hodu padne číslo v rozmezí 1 až 5.
Na poli P_{16} se může hráč zastavit pouze v případě, že na kostce padlo číslo v rozmezí 1 až 5.
Pole P_{17} může být žlutým hráčem ovlivněno, buďto v případě, kdy hodí číslo v rozmezí 1 až 5

nebo dvakrát 6 a poté číslo v rozmezí 1 až 5.
A nakonec pole P_{18} a P_{19} mohou být ovlivněna hráčem, pokud se mu podaří hodit dvakrát 6 a poté číslo v rozmezí 1 až 5.

Zobrazíme-li tabulky pravděpodobností, že se hráč na poli P_n zastaví, pro všechny hráče současně, můžeme přehledně vidět, jak každý ovlivňuje jednotlivá pole.

<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>B</td><td colspan="5">$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$</td><td>0</td><td colspan="5">$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$</td><td colspan="8">0</td></tr>
<tr><td>G</td><td colspan="7">0</td><td colspan="5">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="7">0</td></tr>
<tr><td>Y</td><td colspan="10">0</td><td colspan="2">$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{6} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6}$</td></tr>
</table>

Nyní máme v tabulce zaneseny pravděpodobnosti, že se hráči na daném poli zastaví. My však pro naše účely potřebujeme vědět, jaká je pravděpodobnost, že se na poli P_n nezastaví žádný ze soupeřů. Proto, pro každé pole jednotlivých hráčů spočítáme doplněk a poté mezi sebou pravděpodobnost, že se hráč na daném poli nezastaví vynásobíme, jak je naznačeno níže.

$$
\begin{aligned}
p'_1 &= (1 - p_{B_1}) \cdot (1 - p_{G_1}) \cdot (1 - p_{Y_1}) \\
p'_2 &= (1 - p_{B_2}) \cdot (1 - p_{G_2}) \cdot (1 - p_{Y_2}) \\
p'_3 &= (1 - p_{B_3}) \cdot (1 - p_{G_3}) \cdot (1 - p_{Y_3}) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Výsledné hodnoty jsou následující:

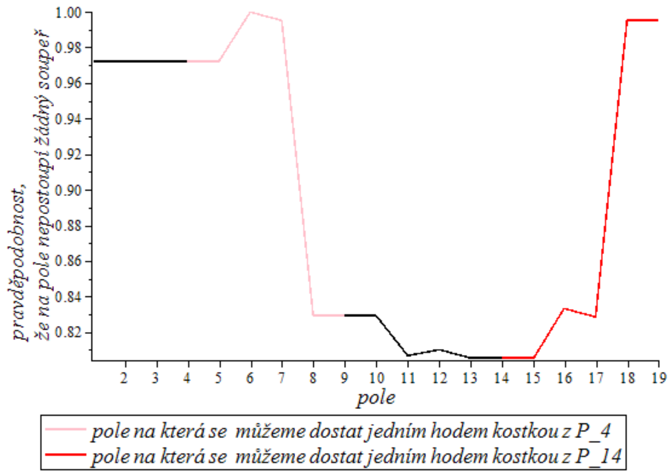
<table>
<tr><td>Pole</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>Hráči</td><td colspan="5">$\frac{35}{36}$</td><td>1</td><td>$\frac{215}{216}$</td><td colspan="3">$\frac{1075}{1296}$</td><td>$\frac{37625}{46656}$</td><td>$\frac{175}{216}$</td><td colspan="3">$\frac{29}{36}$</td><td>$\frac{5}{6}$</td><td>$\frac{179}{216}$</td><td colspan="2">$\frac{215}{216}$</td></tr>
</table>

Výsledný graf pravděpodobností, že se na poli P_n nezastaví ani jeden ze soupeřů, můžeme vidět na obrázku číslo 23. V této části práce, budeme hodnoty zaznamenávat jako spojité čáry, je však třeba zdůraznit, že se v žádném případě nejedná o spojité funkce pravděpodobnosti. Tato forma grafu je využitá proto, že se hodnoty budou v mnoha případech nepřehledně překrývat a spojité čáry nám umožní pohodlnější čtení grafů.

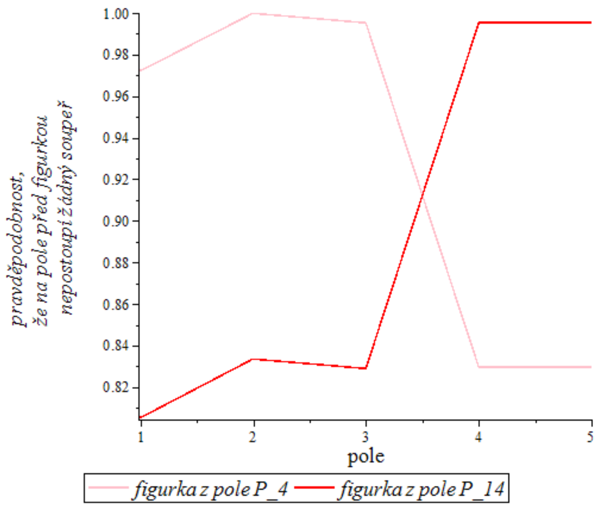
V grafu na obrázku 23 jsou pro obě figurky, jež máme umístěny na hrací desce, barevně vyznačeny hodnoty polí, na která můžeme v následujícím kole postoupit jediným hodem kostkou. Pro náš postup budeme vždy uvažovat posun nanejvýš o 5 polí, pokud bychom hodili číslo 6, pak jsme nuceni nasadit novou figurku a není třeba uvažovat, kterou figurkou na hrací desce táhnout. Růžově jsou v grafu vyznačeny hodnoty pro figurku, která se v tuto chvíli nachází na poli P_4 a červeně pro figurku z pole P_{14}.

Na obrázku číslo 24 pak vidíme graf, ve kterém jsou pro porovnání zachyceny pouze hodnoty polí, na která se můžeme dostat jediným hodem kostkou. Jako P_1 je v tomto případě označeno pole, na kterém se dostaneme hodem čísla 1, P_2 je pole, na které postoupíme, pokud padne číslo 2 a tak dále, až k nejvzdálenějšímu poli, na které můžeme postoupit, tedy k poli P_5.

Z grafu číslo 24 můžeme vyčíst, že dokud nám na kostce nepadne číslo 4 nebo 5, je vždy ve větším bezpečí figurka z pole P_4 a jejím posunem, kromě případu, kdy padne číslo 1, ještě snižujeme pravděpodobnost, že nás soupeř v následujícím kole vyhodí. Pokud bychom však raději dostali do trochu většího bezpečí figurku z pole P_{14}, protože ušla větší kus cesty a má tak pro nás vyšší cenu, sáhneme po ní především v případě, kdy na kostce padne číslo 2, protože tak snížíme pravděpodobnost, že soupeř v následujícím kole postoupí na stejné pole, na jakém se nachází naše figurka. V okamžiku, kdy padne číslo 4 nebo 5, bez váhání zvolíme figurku z pole P_{14}, snížíme tak pravděpodobnost vyhození a dostaneme se velice blízko cíle.

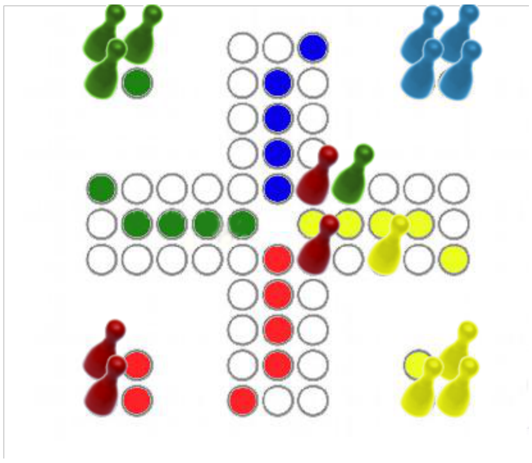


Obrázek 23: Výsledný graf k příkladu 5 (a) – Pravděpodobnost, že se na poli P_n nezastaví žádný soupeř



Obrázek 24: Srovnání pravděpodobností k příkladu 5 (a) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro obě figurky

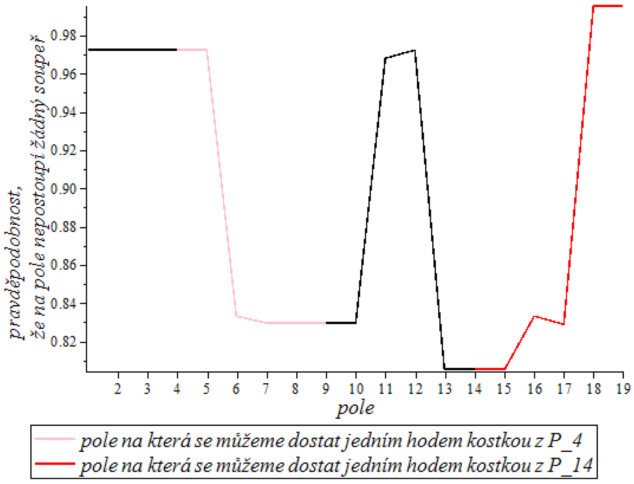
(b) Zadání příkladu 5 (b) je obrázek číslo 25.



Obrázek 25: Zadání příkladu 5 (b)

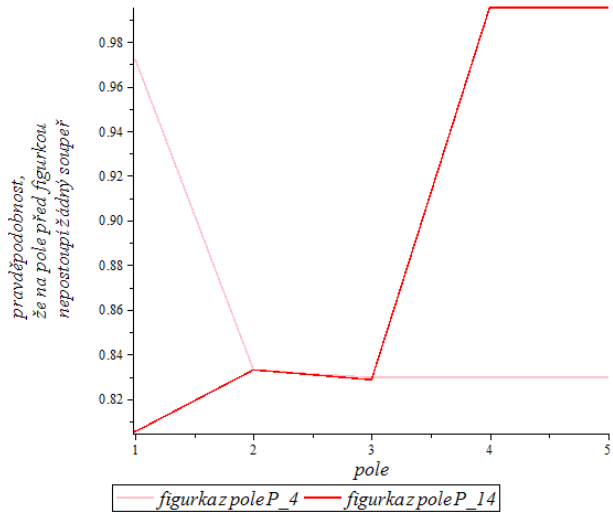
Protože se změnila jen pozice zeleného protihráče z pole P_7 na pole P_5, tedy těsně před naší figurku, číslování polí zůstává stejné.

Výsledný graf pravděpodobností pro toto rozložení hráčů můžeme vidět na obrázku číslo 26.



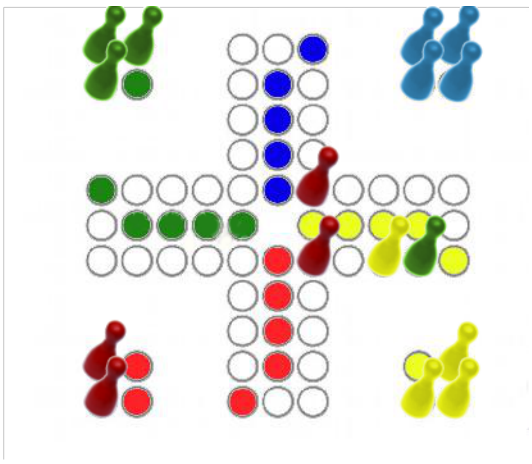
Obrázek 26: Výsledný graf k příkladu 5(b) – Pravděpodobnost, že se na poli P_n nezastaví žádný soupeř

Srovnání pravděpodobností pro obě figurky ilustruje obrázek číslo 27. Situace, kdy na kostce padne číslo 1 je stejná jako v předchozím příkladě. Avšak pokud na kostce padne číslo 2 nebo 3, hodnoty pravděpodobností polí obou figurek se překrývají, a tak je jasné, že budeme táhnout cenější figurkou z pole P_{14}. Pokud na kostce padne 4 nebo 5, pak si opět vybereme figurku z pole P_{14}, protože bude v mnohem větším bezpečí a opět blíže svému cíli. Skutečnost, že se zelený hráč přesunul těsně před figurku z pole P_4 způsobila, oproti předchozímu příkladu, poměrně velkou změnu ve výběru, kterou figurkou budeme táhnout. Zatímco v předchozím příkladě jsme jasně volili cennou figurku z pole P_{14} až když na kostce padlo číslo 4 nebo 5, tentokrát po ní sáhneme vždy kromě okamžiku, kdy padne číslo 1.



Obrázek 27: Porovnání pravděpodobností k příkladu 5(b) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro obě figurky

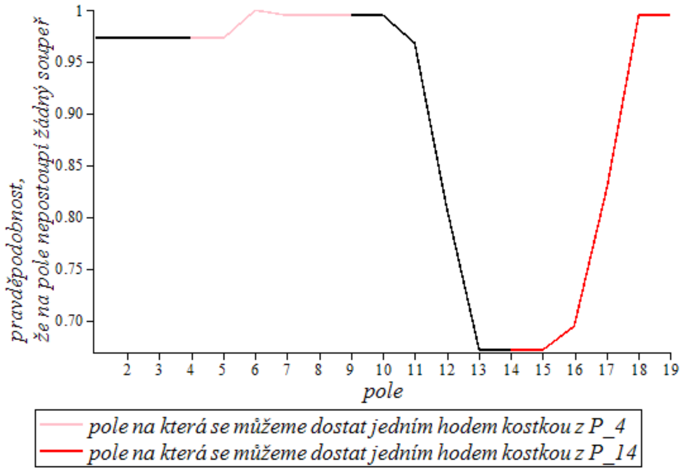
(c) Zadání příkladu 5 (c) je obrázek číslo 28.



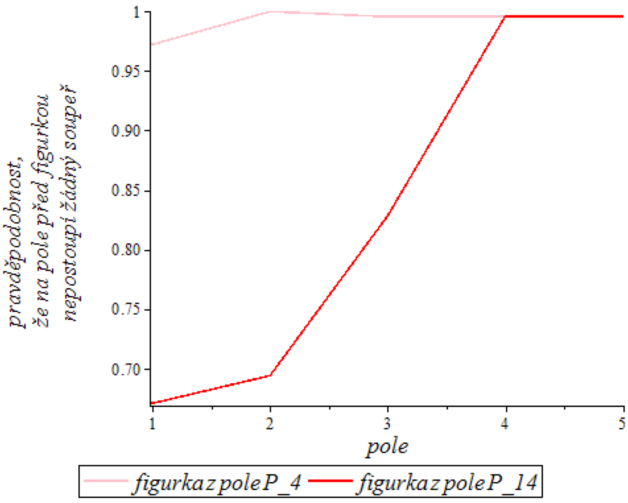
Obrázek 28: Zadání příkladu 5 (c)

Číslování polí se opět nemění a tentokrát se zelený hráč přesunul na pole P_{11} těsně za figurku žlutého hráče.

Výsledný graf pravděpodobností můžeme vidět na obrázku číslo 29 a srovnání pravděpodobností polí pro jednotlivé figurky si můžeme prohlédnout v grafu na obrázku číslo 30. Výsledný graf má tentokrát jinou podobu, hodnoty se nekříží, ale se zvyšujícími se hodnotami, jež můžou na kostce padnout, se přibližují. Kromě případů, kdy na kostce padne číslo 4 nebo 5, je figurka z pole P_{14} ve větším nebezpečí a pokud bychom vycházeli pouze z grafů, měli bychom táhnout figurkou z pole P_4. Nicméně, pokud vezmeme v potaz, že je pro nás figurka z pole P_{14} důležitější a posunem figurky z pole P_4 nijak zvlášť nesnížíme pravděpodobnost vyhození, měli bychom, kromě případu, kdy na kostce padne číslo 1, zvolit právě figurku z pole P_{14}. Posunem o 2 nebo 3 pole snížíme její ohrožení a v okamžik, kdy padne číslo 4 nebo 5 jsou hodnoty pro obě figurky stejné, a tak opět volíme figurku, jež je blíže domečku.



Obrázek 29: Výsledný graf k příkladu 5 (c) – Pravděpodobnost, že se na poli P_n nezastaví žádný soupeř



Obrázek 30: Porovnání pravděpodobností k příkladu 5 (c) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro obě figurky.

■

Z výsledků příkladu 5 můžeme usuzovat, že čím blíže před naší figurkou z pole P_4 byli soupeři, tím větší bylo její ohrožení. A čím blíže za figurkou z pole P_{14} se soupeři nacházeli, tím bylo její ohrožení menší. Ověřme si nyní tato tvrzení na příkladu číslo 6.

Příklad 6

V tomto příkladu budeme porovnávat čtyři verze rozestavění protihráčů:

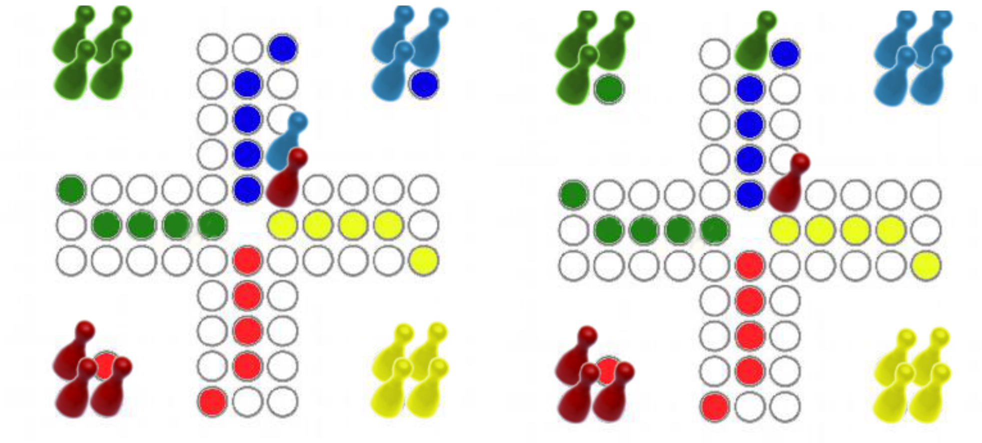
(a) Jeden hráč těsně za naší figurkou

(b) Jeden hráč dále za naší figurkou

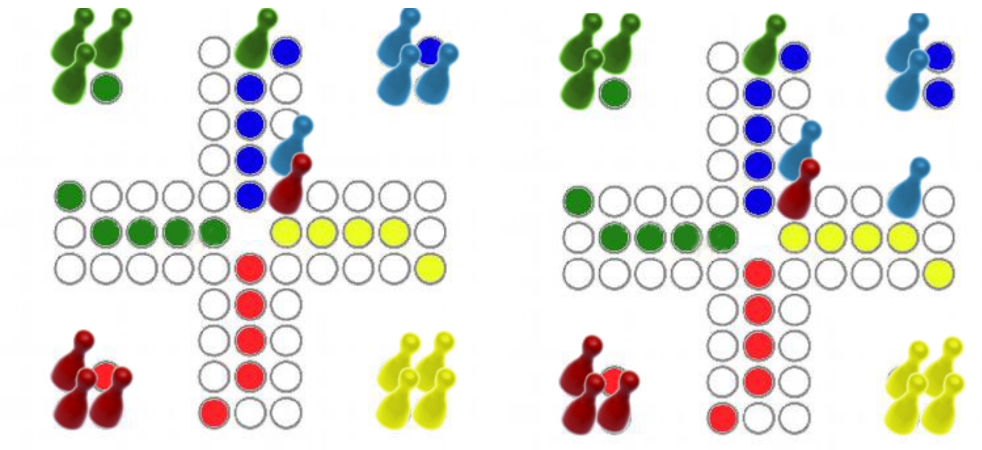
(c) Jden hráč těsně za naší figurkou a druhý dále.

(d) Jeden hráč těsně za naší figurkou, druhý dále a třetí hráč před naší figurkou.

Všechna zadání můžeme vidět na obrázcích 31 a 32.



Obrázek 31: Zadání příkladu 6 (a) a 6 (b)



Obrázek 32: Zadání příkladu 6 (c) a 6 (d)

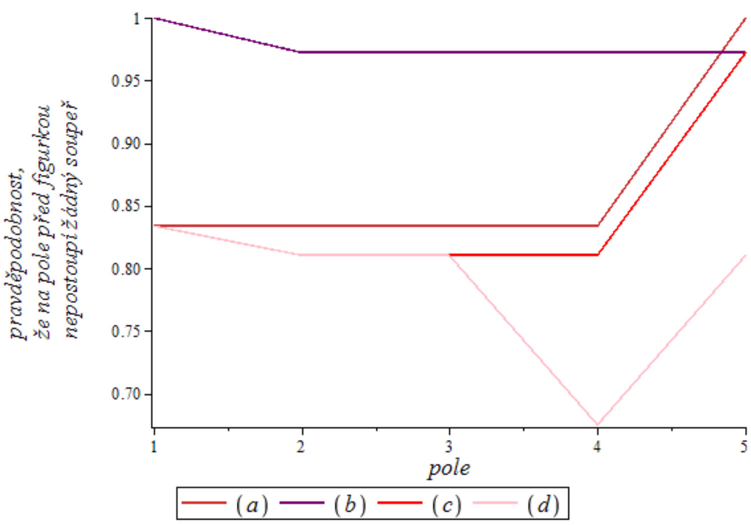
Dále je třeba poznamenat, že v tomto příkladě chceme porovnat pouze vliv hráčů na základě jejich vzdáleností, nebudeme tedy brát v potaz povinnost nasazovat při hodu 6 další figurku a na hrací desce postačí jen jedna červená figurka.

Metoda výpočtů je stejná jako v příkladě 5. Nyní do jednoho grafu zaneseme pravděpodobnost polí, na která můžeme postoupit jediným hodem, pro všechny čtyři případy. Tento graf můžeme vidět na obrázku číslo 33.

Nejdříve srovnejme příklady (a) a (b), kdy je hráč buďto těsně za námi nebo dále za námi. Tedy červenou a fialovou čáru z grafu číslo 33. Až do případu, kdy na kostce padne číslo 5 jsme ve větším bezpečí, pokud je od nás hráč vzdálen. Když číslo 5 padne, ohrozí nás vzdálený hráč více jen proto, že v tomto konkrétním případě víme, že se hráč těsně za námi na páté pole nikdy nedostane.

Pokud nyní vezmeme v potaz i příklad (c), kdy je jeden hráč těsně za námi a druhý o něco dále, tedy oranžovou čáru, můžeme říct, že jsme v tomto případě po celou dobu ve větším ohrožení.

Zbývá příklad (d), kde jsme přidali posledního hráče ob dvě pole před naší figurku. V grafu značený růžově. Tento hráč ovlivňuje pole až od pozice P_4. Z grafu je zjevné, že další soupeř výrazně zvyšuje nebezpečí vyhození naší figurky.



Obrázek 33: Porovnání pravděpodobností k příkladu 6 – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro případy z příkladů 6 (a), 6 (b), 6 (c) a 6 (d).

■

Na základě příkladu číslo 6 můžeme říci, že záleží na tom, jak vzdálení jsou protihráči naší figurce a kolik soupeřů se v našem okolí nachází. Nyní zbývá srovnat případy, kdy se hráči nachází za námi nebo před námi a určit, zda je bezpečnější na místě setrvat nebo utéct. To provedeme v příkladu číslo 7.

Příklad 7

V tomto příkladě budeme rozlišovat následující případy:

(a) Jeden hráč ob pole za námi.

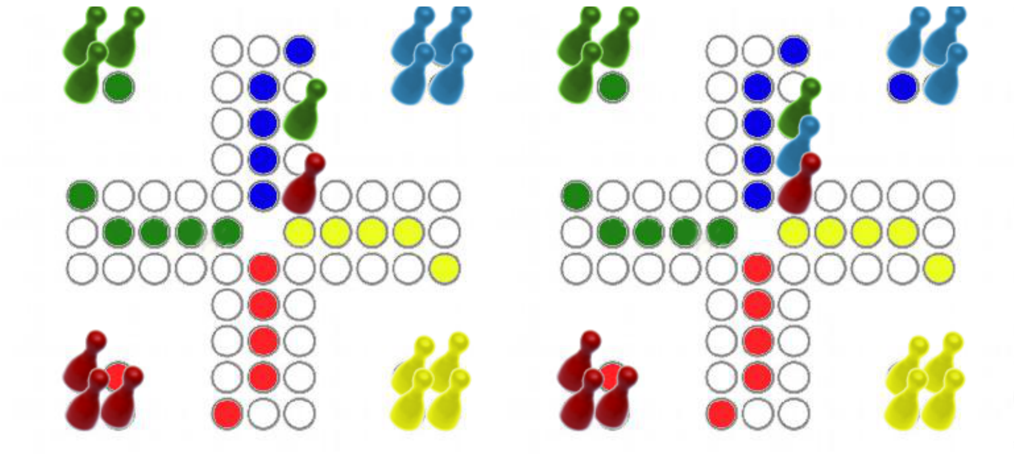
(b) Dva hráči těsně za námi.

(c) Jeden hráč ob pole před námi.

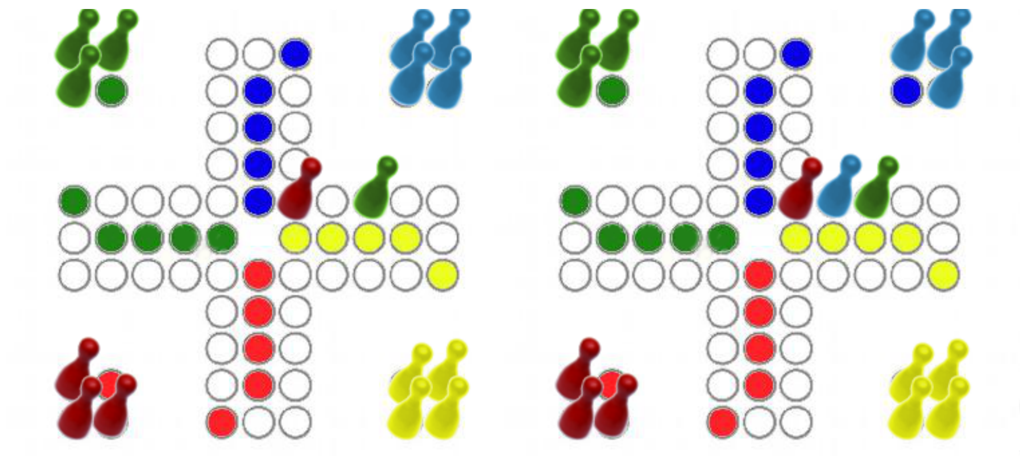
(d) Dva hráči těsně před námi.

(e) Jeden hráč ob pole za námi a druhý ob pole před námi.

Všechna zadání můžeme vidět na obrázcích číslo 34, 35 a 36.

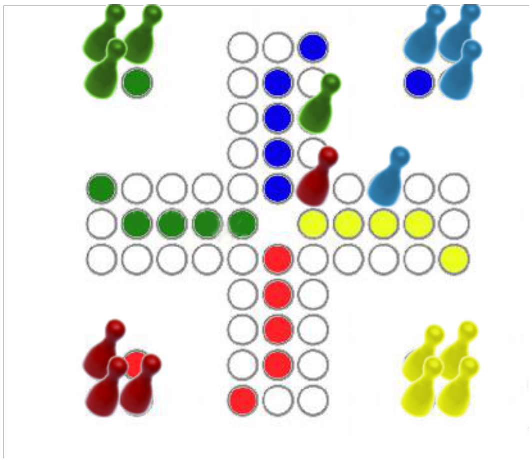


Obrázek 34: Zadání příkladu 7 (a) a 7 (b)



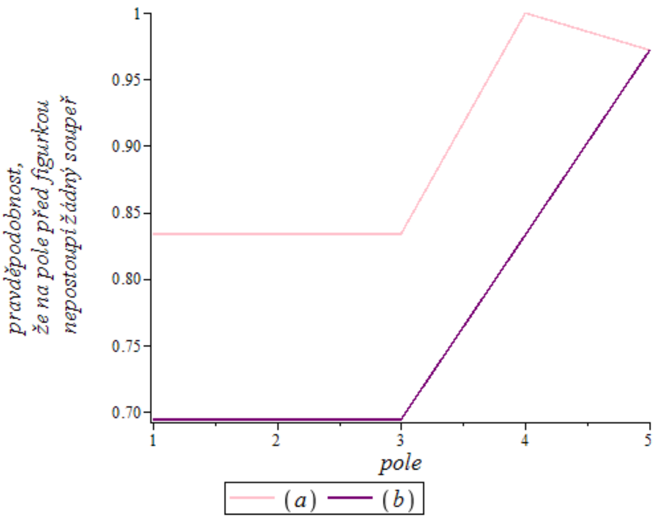
Obrázek 35: Zadání příkladu 7 (c) a 7 (d)

Nejprve srovnejme příklady (a) a (b), tedy jeden hráč ob pole za námi a dva hráči těsně za námi. Metoda výpočtu je stále stejná jako v předchozích příkladech. Srovnání výsledných pravděpodobností můžeme vidět v grafu na obrázku číslo 37. Růžovou barvou jsou zde vyznačeny hodnoty pro případ, kdy se za námi nachází jen jeden hráč a fialovou situace, kdy jsou v těsné blízkosti hned dva hráči. Není velkým překvapením, že pokud je za námi hráčů více,



Obrázek 36: Zadání příkladu 7 (e)

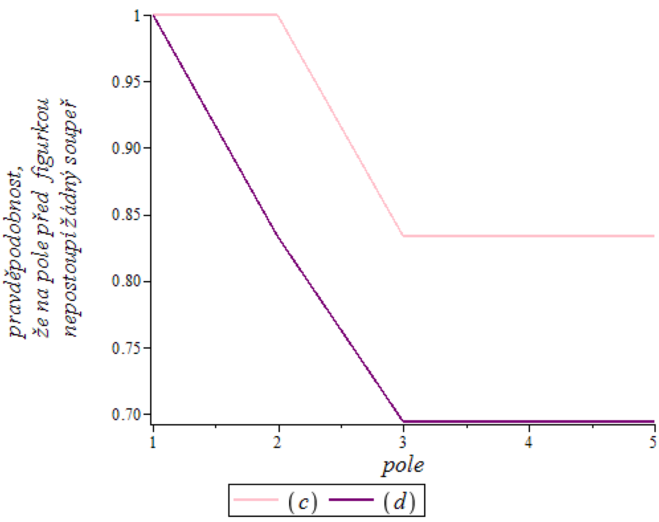
jsme ve větším ohrožení. Hodnoty se na poli P_5 spojí, protože modrý hráč, který v příkladě (b) přibyl, na pole P_5 nikdy nepostoupí.



Obrázek 37: Porovnání pravděpodobností k příkladu 7 (a), 7 (b) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro případy z příkladů 7 (a) a 7 (b)

Nyní srovnejme příklady (c) a (d), tedy jeden hráč ob pole před námi a dva hráči těsně před námi. Výsledný graf je zachycen na obrázku 38. Tímto grafem, jsme potvrdili předchozí tvrzení, že čím více hráčů se v naší blízkosti nachází, tím větší je pravděpodobnost, že budeme v následujícím kole vyhozeni. Hodnoty se tentokrát setkaly na poli P_1, a to protože přidaný hráč pole P_1 nijak neovlivní.

Na konec srovnejme příklady (a), (c) a (e), tedy jeden hráč ob pole za námi, jeden hráč ob pole před námi a dva hráči, jeden ob pole za námi a druhý ob pole před námi. Výsledné hodnoty můžeme pozorovat v grafu na obrázku číslo 39. Z grafu se opět potvrzuje dřívější

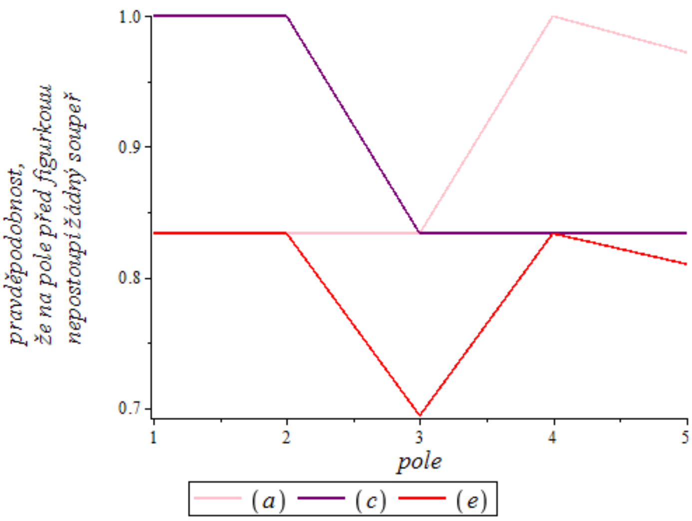


Obrázek 38: Porovnání pravděpodobností k příkladu 7 (c), 7 (d) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro případy z příkladů 7 (c) a 7 (d)

tvrzení. Obecně, čím více hráčů se v blízkosti nachází, tím větší je nebezpečí vyhození. V případě, kdy na kostce padne číslo 1 nebo 2, kopírují hodnoty příkladu (e) pravděpodobnost příkladu (a). Můžeme říct, že za těchto podmínek, nemá vliv, zda se na hrací desce nachází jen jeden hráč ob pole za námi nebo i další ob pole před námi. To je způsobeno skutečností, že druhý hráč nemá vliv na pole, kterými již prošel. Pokud hodíme číslo 3, pak je pravděpodobnost vyhození pro příklad (e) nejvyšší, pro příklady (a) a (c) je tento okamžik zlomový a zaměříme se na něj v závěru příkladu 7. U čísla 4 se hodnoty shodují tentokrát s případem, kdy se nachází jeden hráč před námi a v případě 5, jsou hodnoty příkladu (e) o něco nižší, respektive, ohrožení se opět zvyšuje. ■

Jak bylo řečeno dříve, v příkladech číslo 6 a 7 jsme pracovali jen s jednou naší figurkou na hrací desce, která nám k ověření předpokladů stačila. Za těchto podmínek by výpočty byly samozřejmě zbytečné, protože nemáme z čeho vybírat. Nicméně pokud hrajeme s 2 a více figurkami, je užitečné umět si zvolit, kterou figurkou táhnout. Na základě informací získaných v příkladu číslo 7 můžeme říct, že záleží na tom, zda se hráči nachází za námi nebo před námi a kolik jich v naší blízkosti je.
Obecně platí, že čím více hráčů se nachází v našem okolí, tím více jsme ohrožení.
Dále jsme zjistili, že pokud hodíme číslo menší než 3, pak je pro nás lepší, pokud se protihráč nachází před námi, nedostaneme se tak blíže nebezpečí. A naopak, když padne číslo větší než 3, raději bychom, aby byl protihráč za námi, protože mu „utečeme“.

Hra „Člověče, nezlob se!“ se jistě bude hrát dále po mnohé generace. Šla s dobou a má dnes mnoho virtuálních podob, jež se těší zájmu. Dohledat můžeme i aplikace, které nám řeknou, jaká je pravděpodobnost výhry při určitém rozestavění hráčů, nebo kterou figurkou je v danou



Obrázek 39: Porovnání pravděpodobností k příkladu 7 (a), 7 (c) a 7 (e) – Srovnání pravděpodobností, že se žádný ze soupeřů nezastaví na polích, na která můžeme postoupit jediným hodem kostkou, pro případy z příkladů 7 (a), 7 (c) a 7 (e)

chvíli nejvýhodnější táhnout. Nicméně, taková aplikace není vždy po ruce a k volbě vhodné strategie se hodí znát základy neoblomných zákonů matematiky.

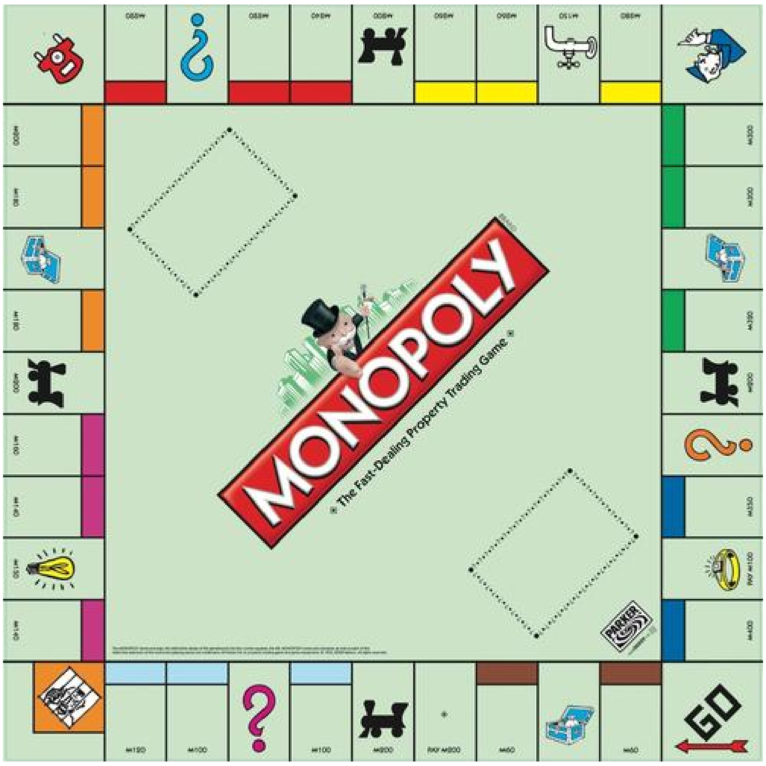
5.2 Monopoly

Monopoly jsou nejprodávanější deskovou hrou 20. století. Její autor, Američan Charles B. Darrow, během krize ztratil práci a z dlouhé chvíle vymyslel tuto hru. Hra měla úspěch, líbila se rodině i známým. Pro zájemce ji nejprve vyráběl na koleně a nakonec podepsal smlouvu s výrobcem her.[4]

Hraje se na hrací desce o 40 polích, kterou můžeme vidět na obrázku číslo 40.

Pokud by někdo neznal podstatu hry Monopoly, zde je její stručný popis:

> *Monopoly je hra na nákup, pronájem a prodej nemovitostí s cílem získat majetek o co největší hodnotě, přičemž vítězem se stává nejbohatší ze všech účastníků hry. Začíná se na startu, odkud každý hráč postupuje se svou figurkou po hrací ploše o tolik políček, kolik činí součet bodů na obou současně vržených kostkách. Jestliže hráč se svou figurkou vstoupí na políčko, které zatím nevlastní, může jej od banky koupit. Pokud však hráč nechce políčko koupit, prodá jej bankéř v aukci nejvyšší nabídce. Hráči vlastnící nemovitosti vybírají nájemné od spoluhráčů, kteří se na jejich nemovitostech zastaví. Stavba hotelů a domů značně zvyšuje vybírané nájemné, takže je výhodné stavět na co největším počtu pozemků. Hráč může získat další finanční prostředky od banky prostřednictvím hypotéky. Hráči musí vždy uposlechnout pokynů*



Obrázek 40: Hrací deska hry Monopoly

uvedených na kartách „Pokladna“ a „Šance“. Během hry se mohou dostat i do vězení. Cílem hry je zůstat jediným hráčem, který nezbankrotoval.[5]

Pravidla hry Monopoly jsou obsáhlá, proto uvedeme jen části, které potřebujeme znát k našim účelům:

Kdo je na řadě, hodí obě kostky a posune se dopředu podle směru šipky o příslušný počet políček. Políčko, které hráč obsadil určuje, co hráč musí udělat. Dvě i více figurek může být současně na stejném políčku. Podle políčka, které hráč obsadil, může mít jednu z následujících možností:

- *Koupit stavební parcelu nebo jinou nemovitost*
- *Zaplatit nájem (pokud jiný hráč tuto nemovitost vlastní)*
- *Platit daně*
- *Vytáhnout si kartu z Pokladny nebo Šance*
- *Jít do vězení*
- *Bezplatně parkovat*
- *Vybrat si plat 20000 korun.*

Nákup nemovitostí:
Jestliže hráč obsadí políčko s volnou nemovitostí (tj. postoupí na stavební parcelu, jejíž kartu Kupní smlouva nikdo nevlastní), má možnost si ji koupit. Pokud se tak rozhodne, zaplatí bance cenu uvedenou na tom políčku. Za to dostane, jako důkaz vlastnictví, kartu Kupní smlouva, kterou musí mít položenu před sebou textem nahoru. Jestliže si hráč nepřeje nemovitost koupit, bankéř ji musí okamžitě nabídnout ke koupi v dražbě. Nabídky mohou začít na jakékoliv ceně, kterou je některý z hráčů ochoten zaplatiti. Nemovitost dostane hráč, který za ní zaplatí nejvíce. Každý z hráčů (i ten, který tuto nemovitost za původní cenu odmítl) se může zúčastnit aukce.

Vlastnictví nemovitostí:
Vlastnictví nemovitostí hráče opravňuje k výběru nájmu od jakéhokoliv „nájemníka“, který skončí na jeho nemovitosti. Je výhodné vlastnit všechny nemovitosti od jedné barvy – jinými slovy míti monopol.

Obsazení políčka s nemovitostí ve vlastnictví:
Jestliže hráč obsadí políčko s nemovitostí, která je ve vlastnictví jiného hráče, majitel od něj může vymáhat nájemné. To se musí stát než další hráč hodí kostkami. Cena nájemného je zapsána na kartách Kupní smlouva pro každou nemovitost a je různá podle množství budov na pozemku. Jestliže všechny nemovitosti od jedné barvy jsou ve vlastnictví jednoho hráče (monopol), pak se nájemné na jakémkoliv z těchto nezastavěných pozemků zdvojnásobuje.

Obsazení políčka podniku veřejných služeb (energetické závody, vodárny):
Obsazení jednoho z těchto políček umožňuje hráči koupi podniku veřejných služeb, pokud tento již není ve vlastnictví jiného hráče. Tak jako při koupi jiných nemovitostí, hráč zaplatí cenu uvedenou na příslušném políčku. Jestliže je tato nemovitost již někým vlastněna, vlastník po vás může požadovat nájemné podle čísla hodu, který vás na toto políčko dostal.

Obsazení nádraží:
Pokud jste první hráč, který toto políčko obsadil, máte možnost si nádraží koupit. Jestliže stanici již někdo vlastní, hráč musí zaplatit poplatek uvedený na kartě.

Obsazení políčka „Šance“ nebo „Pokladna“:
Obsazení jednoho z těchto políček znamená, že hráč musí sejmout vrchní kartu z příslušné hromádky. Tyto karty vám mohou přikazovat:

- *Posunout vaší figurku*
- *Zaplatit peníze – například daně*
- *Dostat peníze*
- *Jít do vězení*

- *Dostat se bezplatně z vězení*

Vězení:

Do vězení se dostanete jestliže:
Skočíte na políčku „JDI DO VĚZENÍ“, nebo si vytáhnete kartu Šance nebo Pokladna označenou „JDI DO VĚZENÍ“, nebo hodíte 3× za sebou stejný počet ok na obou kostkách během jednoho kola. Pokud jste poslán do vězení, znamená to pro vás konec hry v tomto kole. Z vězení se lze dostat, jestliže:

- *zaplatíte pokutu 5000 korun, můžete pokračovat v dalším kole,nebo*
- *koupíte kartu „Opusťte bezplatně vězení“ od jiného hráče za vzájemně dohodnutou cenu a použijete ji, abyste se dostal ven, nebo*
- *použijete vlastní kartu „Opusťte bezplatně vězení“, pokud ji máte, nebo*
- *počkáte 3 kola, jestliže se vám podaří hodit double během některého z těchto 3 kol, můžete opustit vězení hned s použitím čísla, které jste hodil.*

Po 3 kole musí hráč z vězení odejít, postoupí o počet políček rovnající se jeho hodu a zaplatí 5000 korun než vězení opustí. Hráči mohou vybírat nájemné ze svých nemovitostí i když sedí ve vězení. Jestliže nejste „posláni do vězení“, ale pouze skončíte na políčku vězení díky vašemu hodu, pak jste „jen na návštěvě“ a neplatíte žádnou pokutu. V dalším kole pak pokrčujete normálním způsobem.

Bankrot:

Pokud dlužíte bance nebo jinému hráči více peněz než můžete získat z vašich aktiv, vyhlásíte bankrot a odstoupíte ze hry.[5]

Jak jsme se dozvěděli v pravidlech hry, už nám nebude stačit jedna hrací kostka a nyní je třeba zjistit jak se chovají pravděpodobnosti polí, při hře se dvěma kostkami.

5.2.1 Pravděpodobnost polí při hře se dvěma kostkami

Pokud házíme dvěma kostkami, jako výslednou hodnotu uvažujeme součet obou ok, která padnou. Nejprve spočítejme, jaká je pravděpodobnost, že v součtu padne číslo N. Výsledné číslo budeme při výpočtech značit jako N_1 pro jedničku, N_2 pro dvojku, N_3 pro trojku a tak dále, až po N_{12} pro dvanáctku, protože maximum, které může na obou šestistěnných kostkách v součtu padnout, je právě číslo 12. Pravděpodobnost, že v součtu padne číslo N_i je

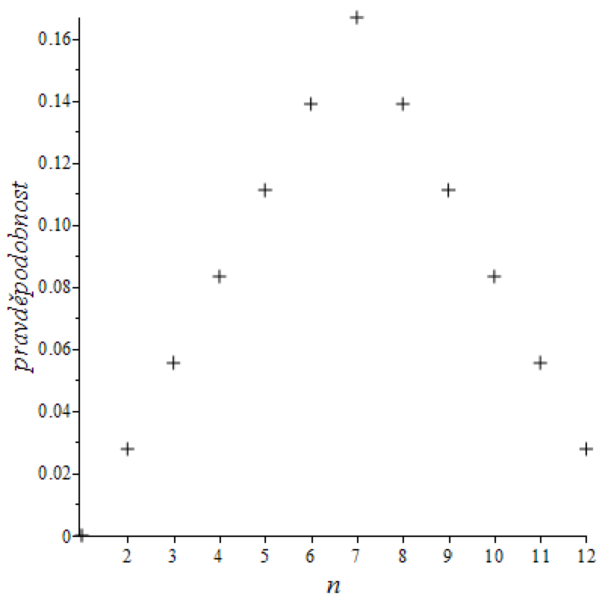
$$\begin{aligned}
N_1 &= 0, \\
N_2 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}, \\
N_3 &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N_4 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36},\\
N_5 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{4}{36},\\
N_6 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36},\\
N_7 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36},\\
N_8 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36},\\
N_9 &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{4}{36},\\
N_{10} &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{3}{36},\\
N_{11} &= \frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{2}{36},\\
N_{12} &= \frac{1}{36}.
\end{aligned}
$$

K výsledkům jsme došli takto:

Číslo 1 nikdy nepadne, protože minimum, které v součtu získáme je 2.
Číslo 2 může padnout jen jedním způsobem, a to jako součet 1 a 1. U výpočtu pravděpodobnosti čísla 2 už můžeme pozorovat rozdíl oproti hodu jednou kostkou. Původní uniformní pravděpodobnostní prostor se při hodu dvěma kostkami rozšířil z $\Omega = [1,6]$ na $\Omega = [1,6]^2$. Pravděpodobnost každého jevu, tak získáme dělením 36 a k hodu čísla 2 může vést jen jeden jev $\{[1,1]\}$, proto $N_2 = \frac{1}{36}$.
Číslo 3 získáme součtem 2 a 1. Tento součet může padnout dvěma způsoby, buďto 2 na první kostce a 1 na druhé nebo naopak. Jedná se o dva jevy $\{[2,1],[1,2]\}$, proto $N_3 = \frac{2}{36}$.
Jev kdy padne číslo 4 může nastat třemi způsoby $\{[1,3],[2,2],[3,1]\}$.
Pro N_5 mohou nastat jevy $\{[1,4],[2,3],[3,2],[4,1]\}$.
Takto pokračujeme dále.
Číslo 7 může padnout 6 způsoby $\{[1,6],[2,5],[3,4],[4,3],[5,2],[6,1]\}$ a poté se počet možností, jak získat výsledné číslo snižuje.
K číslu 8 můžou vést jevy $\{[2,6],[3,5],[4,4],[5,3],[6,2]\}$
A tak dále, až po číslo 12, které padne jedině jakou součet dvou 6.

První závěr můžeme vyvodit již z těchto výpočtů. Nejvyšší pravděpodobnost má číslo 7 a mělo by tedy padnout nejčastěji, to potvrzuje i graf na obrázku číslo 41, kde je zachycena pravděpodobnost hodu čísla 1 až 12. Nicméně hodnota pravděpodobnosti čísla 7 se od ostatních čísel neliší tak výrazně, abychom tento jev zpozorovali při běžné hře a nemůžeme se na něj příliš spoléhat.



Obrázek 41: Pravděpodobnost, že v součtu padne číslo N_n

Nyní vyčíslíme pravděpodobnost polí nejprve pro P_1 až P_{12}. Stejně jako v Kapitole 1 se výpočet pravděpodobností polí na která můžeme postoupit jediným hodem, bude mírně lišit od následujících.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 0 \\
p_2 &= N_2 + p_1 \cdot N_1 = \frac{1}{36} + 0 \cdot 0 = \frac{1}{36} \\
p_3 &= N_3 + p_1 \cdot N_2 + p_2 \cdot N_1 = \frac{1}{18} + 0 + 0 = \frac{1}{18} \\
p_4 &= N_4 + p_1 \cdot N_3 + p_2 \cdot N_2 + p_3 \cdot N_1 = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{109}{1296} \\
p_5 &= N_5 + p_1 \cdot N_4 + p_2 \cdot N_3 + p_3 \cdot N_2 + p_4 \cdot N_1 = \frac{4}{36} + 0 + \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{36} + 0 = \frac{37}{324} \\
p_6 &= N_6 + p_2 \cdot N_4 + p_3 \cdot N_3 + p_4 \cdot N_2 = \frac{6841}{46656} \\
p_7 &= N_7 + p_2 \cdot N_5 + p_3 \cdot N_4 + p_4 \cdot N_3 + p_5 \cdot N_2 = \frac{1417}{7776} \\
p_8 &= N_8 + p_2 \cdot N_6 + p_3 \cdot N_5 + p_4 \cdot N_4 + p_5 \cdot N_3 + p_6 \cdot N_2 = \frac{279397}{1679616} \\
p_9 &= N_9 + p_2 \cdot N_7 + p_3 \cdot N_6 + p_4 \cdot N_5 + p_5 \cdot N_4 + p_6 \cdot N_3 + p_7 \cdot N_2 = \frac{32653}{209952} \\
p_{10} &= N_{10} + p_2 \cdot N_8 + p_3 \cdot N_7 + p_4 \cdot N_6 + p_5 \cdot N_5 + p_6 \cdot N_4 + p_7 \cdot N_3 + p_8 \cdot N_2 = \frac{8935921}{60466176} \\
p_{11} &= N_{11} + p_2 \cdot N_9 + p_3 \cdot N_8 + p_4 \cdot N_7 + p_5 \cdot N_6 + p_6 \cdot N_5 + p_7 \cdot N_4 + p_8 \cdot N_3 + p_9 \cdot N_2 = \frac{4271189}{30233088} \\
p_{12} &= N_{12} + p_2 \cdot N_{10} + p_3 \cdot N_9 + p_4 \cdot N_8 + p_5 \cdot N_7 + p_6 \cdot N_6 + p_7 \cdot N_5 + p_8 \cdot N_4 + p_9 \cdot N_3 + p_{10} \cdot N_2 = \\
&= \frac{292122973}{2176782336}
\end{aligned}
$$

Výpočet pravděpodobností polí P_1 až P_5 je podrobně rozepsán. Jev, kdy se hráč zastaví na poli P_1, má nulovou pravděpodobnost, protože žádným hodem nezískáme číslo 1.
Na pole P_2 se tak můžeme dostat jedině z výchozího pole, které značme jako P_0 a pravděpodobnost jevu, kdy se hráč zastaví na poli P_2 je tak rovna pravděpodobnosti, že v součtu padne na kostkách číslo 2. Až po pole P_5 je ve výpočtu jako druhý sčítanec uveden případ, kdy se hráč na pole P_n dostal hodem příslušného čísla z pole P_1, tento jev má však nulovou pravděpodobnost, a tak výsledek neovlivní. Tuto formalitu proto od nynějška ze zápisů vypustíme.
Na pole P_3 může hráč postoupit z pole P_0 hodem čísla 3 a z pole P_2 by hráč mohl postoupit hodem čísla 1. Avšak jak už bylo řečeno, jev kdy na kostkách padne číslo 1 je nemožný, a proto je opět uveden jen pro popsání algoritmu výpočtu. I tento jev nebudeme dále ve výpočtech zapisovat.
Pole P_4 dosáhneme opět z pole P_0, tentokrát hodem 4 a z pole P_2 pokud v součtu padne číslo 2.

Obdobně postupujeme dále až po pole P_{12}. Pokud bychom chtěli algoritmus výpočtů popsat rovnicí, pak bude vypadat následovně

$$p_n = N_n + \sum_{i=2}^{n-2} p_{n-i} \cdot N_i. \tag{17}$$

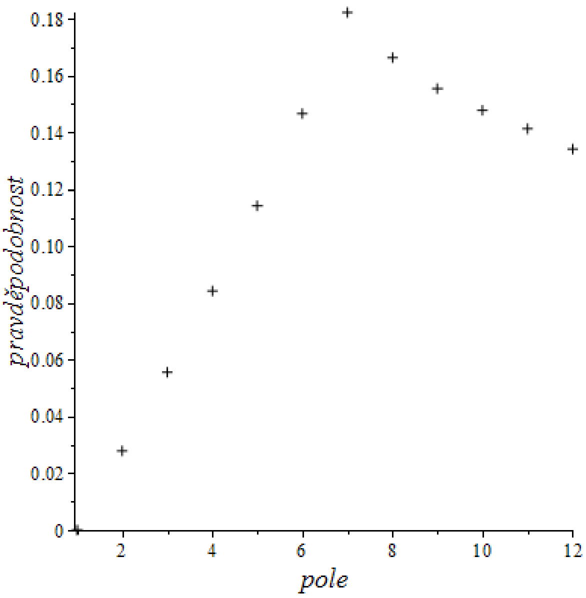
Výsledný graf pravděpodobností, že se hráč zastaví na polích P_1 až P_{12} můžeme vidět na obrázku číslo 42. Z grafu je zřejmý vzestup hodnot pravděpodobností jednotlivých polí až po maximum na poli P_7. Tento jev souvisí s vysokou pravděpodobností toho, že v součtu na kostkách padne právě číslo 7, to je způsobeno skutečností, že číslo 7 má nejvyšší počet kombinací, jak jej hodit a stejně tak, nejvyšší počet kombinací, jak postoupit na nějaké pole, najdeme u pole P_7.

Algoritmus pro výpočet polí P_{13} a vyšších popisuje rovnice číslo (18). V rovnici vidíme, že stejně jako v Kapitole 1 chybí první sčítanec, protože již není možné dostat se na pole jediným hodem. Dalším rozdílem jsou hranice sumy, protože nejvzdálenější pole, ze kterého můžeme postoupit na pole P_n je pole P_{n-12}

$$p_n = \sum_{i=2}^{12} p_{n-i} \cdot N_i. \tag{18}$$

Například výpočet pravděpodobnosti pole P_{14} je následující

$$\begin{aligned} p_{14} &= p_{12} \cdot N_2 + p_{11} \cdot N_3 + p_{10} \cdot N_4 + p_9 \cdot N_5 + p_8 \cdot N_6 + p_7 \cdot N_7 + p_6 \cdot N_8 + \\ &\quad + p_5 \cdot N_9 + p_4 \cdot N_{10} + p_3 \cdot N_{11} + p_2 \cdot N_{12}. \end{aligned}$$



Obrázek 42: Pravděpodobnost, že se hráč zastaví na poli P_1 až P_{12} pro dvě hrací kostky

A pokud budeme chtít z rovnice (18) sestavit lineární rekurentní rovnici řádu k s konstantními koeficienty, pak bude mít tuto podobu

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-2} \cdot N_2 + a_{n-3} \cdot N_3 + a_{n-4} \cdot N_4 + a_{n-5} \cdot N_5 + a_{n-6} \cdot N_6 + a_{n-7} \cdot N_7 + \\ &\quad + a_{n-8} \cdot N_8 + a_{n-9} \cdot N_9 + a_{n-10} \cdot N_{10} + a_{n-11} \cdot N_{11} + a_{n-12} \cdot N_{12}, \end{aligned} \tag{19}$$

kde N_1 až N_{12} jsou konstantní koeficienty. Pokud koeficienty do rovnice (19) dosadíme, získáme rovnici

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-3} \cdot \frac{1}{18} + a_{n-4} \cdot \frac{1}{12} + a_{n-5} \cdot \frac{1}{9} + a_{n-6} \cdot \frac{5}{36} + a_{n-7} \cdot \frac{1}{6} + a_{n-8} \cdot \frac{5}{36} + \\ &\quad + a_{n-9} \cdot \frac{1}{9} + a_{n-10} \cdot \frac{1}{12} + a_{n-11} \cdot \frac{1}{18} + a_{n-12} \cdot \frac{1}{36}. \end{aligned} \tag{20}$$

Po srovnání s rovnicí (4) z Kapitoly 3 zjišťujeme, že tentokrát budou koeficienty c_1 až c_n různé, konkrétně $c_1 = N_1$, $c_2 = N_2$, $c_3 = N_3$,..., $c_{12} = N_{12}$. Po bližším prozkoumaní čísel, zjišťujeme, že $N_2 = N_{12} = \frac{1}{36} = c_1$, $N_3 = N_{11} = \frac{1}{18} = c_2$, $N_3 = N_{10} = \frac{1}{12} = c_3$, $N_5 = N_9 = \frac{1}{9} = c_4$, $N_6 = N_8 = \frac{5}{36} = c_5$ a zbývá $N_7 = \frac{1}{6} = c_6$. Máme tedy 6 různých konstantních koeficientů c_1 až c_6.

Dále nesmíme zapomenout, že je třeba zadat počáteční podmínky. Těmi jsou pravděpodobnosti polí P_1 až P_{12}, kde $a_1 = P_1$, $a_2 = P_2$, ..., $a_{12} = P_{12}$. Nyní se můžeme pustit do řešení lineární rekurentní rovnice 12. řádu s konstantními koeficienty (20).

Víme, že $a_n = r^n$ je řešením rekurentního vztahu

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-2}\cdot\frac{1}{36} + a_{n-3}\cdot\frac{1}{18} + a_{n-4}\cdot\frac{1}{12} + a_{n-5}\cdot\frac{1}{9} + a_{n-6}\cdot\frac{5}{36} + a_{n-7}\cdot\frac{1}{6} + a_{n-8}\cdot\frac{5}{36} + \\ &\quad + a_{n-9}\cdot\frac{1}{9} + a_{n-10}\cdot\frac{1}{12} + a_{n-11}\cdot\frac{1}{18} + a_{n-12}\cdot\frac{1}{36} \end{aligned}$$

právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} r^n &= r^{n-2}\cdot\frac{1}{36} + r^{n-3}\cdot\frac{1}{18} + r^{n-4}\cdot\frac{1}{12} + r^{n-5}\cdot\frac{1}{9} + r^{n-6}\cdot\frac{5}{36} + r^{n-7}\cdot\frac{1}{6} + r^{n-8}\cdot\frac{5}{36} + \\ &\quad + r^{n-9}\cdot\frac{1}{9} + r^{n-10}\cdot\frac{1}{12} + r^{n-11}\cdot\frac{1}{18} + r^{n-12}\cdot\frac{1}{36}. \end{aligned}$$

Pokud nyní z rovnice vytkneme r^{n-12} a převedeme členy na stejnou stranu, získáme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} r^{12} - r^{10}\cdot\frac{1}{36} - r^{9}\cdot\frac{1}{18} - r^{8}\cdot\frac{1}{12} - r^{7}\cdot\frac{1}{9} - r^{6}\cdot\frac{5}{36} - r^{5}\cdot\frac{1}{6} - r^{4}\cdot\frac{5}{36} - r^{3}\cdot\frac{1}{9} - & \\ - r^{2}\cdot\frac{1}{12} - r^{1}\cdot\frac{1}{18} - r^{0}\cdot\frac{1}{36} &= 0 \end{aligned}$$

a po násobení rovnice číslem 36, získáváme přehlednou charakteristickou rovnici

$$36r^{12} - r^{10} - 2r^9 - 3r^8 - 4r^7 - 5r^6 - 6r^5 - 5r^4 - 4r^3 - 3r^2 - 2r^1 - r^0 = 0. \tag{21}$$

Pomocí Maple, získáme přibližné analytické řešení rovnice (21). Řešením jsou hodnoty dvanácti kořenů charakteristické rovnice r_1 až r_{12}

$$\begin{aligned} r_1 &= -0,6703320476030967, \\ r_2 &= -0,613962874333093 - 0,324952220261894i, \\ r_3 &= -0,613962874333093 + 0,324952220261894i, \\ r_4 &= -0,375695199225260 - 0,570175161011412i, \\ r_5 &= -0,375695199225260 + 0,570175161011412i, \\ r_6 &= -0,0802298885659718 - 0,718983078522991i, \\ r_7 &= -0,0802298885659718 + 0,718983078522991i, \\ r_8 &= 0,294194556360142 - 0,668367097443301i, \\ r_9 &= 0,294194556360142 + 0,668367097443301i, \\ r_{10} &= 0,610859429565732 - 0,535521851926026i, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= 0,610859429565732 + 0,535521851926026i, \\
r_{12} &= 1.
\end{aligned}
$$

Opět se zde objevují dva reálné kořeny, kdy jede z nich je číslo 1, jež jsme mohli odhadnout. Ostatní kořeny jsou pak komplexní čísla.

Z Věty 1 víme, že posloupnost $\{a_n\}$ je řešením rekurentní rovnice (20) právě tehdy, když

$$
\begin{aligned}
a_n &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \alpha_3 r_3^n + \alpha_4 r_4^n + \alpha_5 r_5^n + \alpha_6 r_6^n + \alpha_7 r_7^n + \alpha_8 r_8^n + \alpha_9 r_9^n + \alpha_{10} r_{10}^n + \\
&+ \alpha_{11} r_{11}^n + \alpha_{12} r_{12}^n,
\end{aligned}
$$

kde $n = 1, 2, ..., 12$ a $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{12}$ jsou konstanty.

Tyto konstanty získáme metodou neurčitých koeficientů pro stanovené počáteční podmínky. Pro nalezení konstant vyřešíme soustavu dvanácti lineárních rovnic s kořeny $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{12}$ a známými hodnotami $a_1 = p_1, a_2 = p_2, ..., a_{12} = p_{12}$ obdobně jako v Kapitole 3.

Po vyřešení soustavy rovnic s využitím Maple získáváme hodnoty konstant

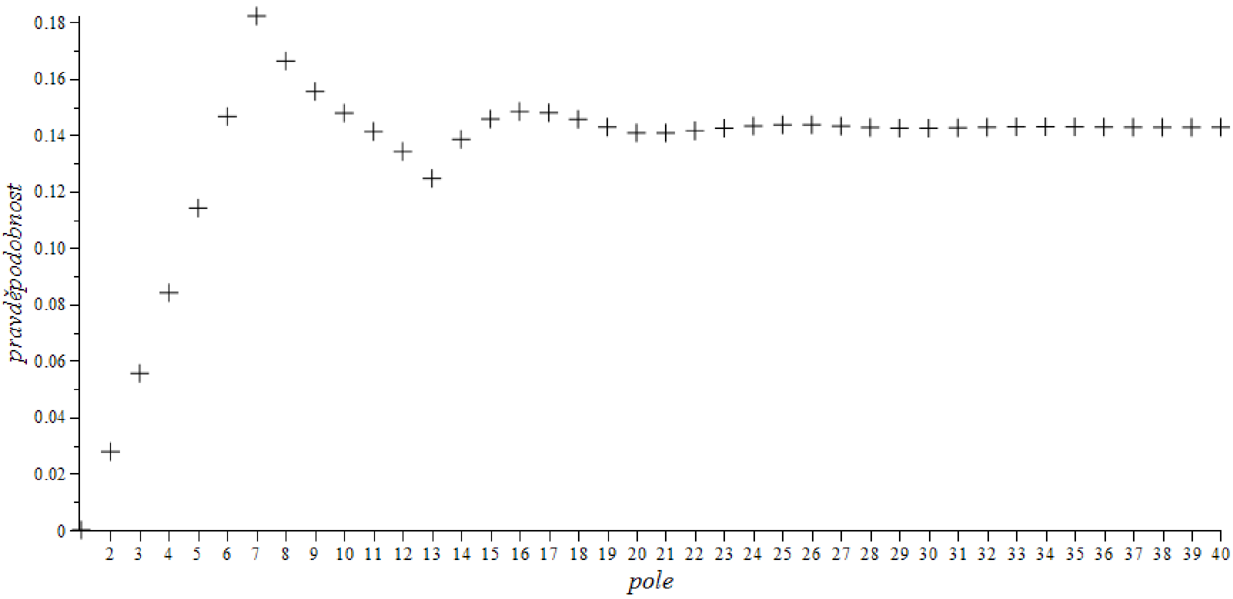
$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0,0714285716917559, \\
\alpha_2 &= 0,0859256085491714 - 0,00354665848564225i, \\
\alpha_3 &= 0,0859256085491714 + 0,00354665848564227i, \\
\alpha_4 &= 0,0714285715592353 + 1,39278463762160 \cdot 10^{-10}i, \\
\alpha_5 &= 0,0714285715592352 - 1,39278505395524 \cdot 10^{-10}i, \\
\alpha_6 &= 0,0855504329031055 - 0,0127793327139968i, \\
\alpha_7 &= 0,0855504329031055 + 0,0127793327139969i, \\
\alpha_8 &= 0,0714285714581785 + 1,24371237116208 \cdot 10^{-10}i, \\
\alpha_9 &= 0,0714285714581785 - 1,24371142087503 \cdot 10^{-10}i, \\
\alpha_{10} &= 0,0785239589827213 - 0,0367385823782229i, \\
\alpha_{11} &= 0,0785239589827214 + 0,0367385823782229i, \\
\alpha_{12} &= 0,142857142873412.
\end{aligned}
$$

Řešením lineární homogenní rovnice rekurentní 12. řádu s konstantními koeficienty (20) je rovnice

$$
\begin{aligned}
a_n \doteq\ & 0,07 \cdot (-0,67)^n + (0,09 - 4 \cdot 10^{-3} i) \cdot (-0,61 - 0,32i)^n + \\
& +(0,09 + 4 \cdot 10^{-3} i) \cdot (-0,61 + 0,32i)^n + (0,07 + 1,39 \cdot 10^{-10} i) \cdot (-0,38 - 0,57i)^n + \\
& +(0,07 - 1,39 \cdot 10^{-10} i) \cdot (-0,38 + 0,57i)^n + (0,09 - 0,01i) \cdot (-0,08 - 0,72i)^n + \\
& +(0,09 + 0,01i) \cdot (-0,08 + 0,72i)^n + (0,07 + 1,24 \cdot 10^{-10} i)(0,29 - 0,67i)^n + \\
& +(0,07 - 1,24 \cdot 10^{-10} i) \cdot (0,29 + 0,67i)^n + (0,08 - 0,04i) \cdot (0,61 - 0,54i)^n + \\
& +(0,08 + 0,04i) \cdot (0,61 + 0,54i)^n + 0,14 \cdot 1^n,
\end{aligned} \tag{22}
$$

kde $n \in N$.

Nyní již můžeme vyčíslit i pravděpodobnost polí P_{13} a vyšších. Výsledný graf pravděpodobnosti pro všech 40 polí hrací desky můžeme vidět na obrázku číslo 43. Část grafu po pole P_{12} známe z obrázku 42, dále hodnoty tvoří ještě jednu výraznou „vlnu" a poté téměř neznatelně vzrůstají znova. Nakonec se hodnoty pravděpodobnosti přibližně od pole P_{29} ustálí, podobně jako tomu bylo v grafu na obrázku číslo 2 zachycujícím pravděpodobnost polí pro hru s jednou hrací kostkou.



Obrázek 43: Pravděpodobnost, že se hráč zastaví na poli P_n pro dvě hrací kostky

Hodnoty se tentokrát ustálily přibližně na pravděpodobnosti 0,14, tuto hodnotu jsme již viděli jako poslední koeficient rovnice 22. Na základě zkušeností z Kapitoly 4 můžeme říct, že se jedná o limitu posloupnosti $\{a_n\}$ a hodnoty pravděpodobností konvergují k číslu přibližně 0,14. Ve 4. kapitole se nám povedlo vyčíslit limitu přesně, a tak se o to pokusíme i teď.

Na základě Definice 1 můžeme určit střední hodnotu počtu ok při hodu dvěma kostkami.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 2 \cdot N_2 + 3 \cdot N_3 + 4 \cdot N_4 + 5 \cdot N_5 + 6 \cdot N_6 + 7 \cdot N_7 + 8 \cdot N_8 + \\
&\quad +9 \cdot N_9 + 10 \cdot N_{10} + 11 \cdot N_{11} + 12 \cdot N_{12} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{1}{18} + 4 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{1}{6} + 8 \cdot \frac{5}{36} + \\
&\quad +9 \cdot \frac{1}{9} + 10 \cdot \frac{1}{12} + 11 \cdot \frac{1}{18} + 12 \cdot \frac{1}{36} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

Zjistili jsme, že střední hodnota posunu hráče po hracím plánu je 7 polí. Není velkým překvapením, že při hodu dvěma kostkami je hodnota oproti hře s jednou kostkou dvojnásobná. Mohli jsme využít skutečnosti, že střední hodnota součtu je součet středních hodnot a výpočet provést jednodušeji.

$$E(X_2) \quad = \quad E(X_1) + E(X_1) = 3,5 + 3,5 = 7$$

Připomeňme, že tento fakt je platný v případě, kdy jsou pravděpodobnosti ustáleny na limitní hodnotě a opět uvažujme druhé a vyšší kolo. Postup přesného vyčíslení limity je pak stejný jako v Kapitole 4. Představme si obdélník o délce $l = 7$ polí odpovídající průměrnému posunu figurky po hracím poli, obsahu $S = 1$ popisujícím pravděpodobnost, že se hráč na nějakém z těchto sedmi polí zastaví a výšce v jež představuje hledanou limitní hodnotu. Neznámou výšku opět snadno spočítáme ze vzorce pro obsah obdélníku

$$
\begin{aligned}
S &= l \cdot v \\
v &= \frac{S}{l} \\
v &= p_n = \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

Získali jsme přesnou limitní hodnotu posloupnosti. Jinak řečeno, zjistili jsme, že od určité pozice n se pravděpodobnost každého pole blíží pravděpodobnosti $p_n = \frac{1}{7}$. Oproti hře s jednou kostkou je pravděpodobnost každého pole P_n v druhém a vyšším kole při hře s dvěma kostkami poloviční. To je způsobeno skutečností, že se zdvojnásobila střední hodnota posunu hráče po hracím poli. Proto musí ve výsledku pravděpodobnost každého pole v druhém a vyšším kole klesnout. Jinak řečeno, při hře se dvěma kostkami se hráč po hracím plánu pohybuje dvakrát rychleji a každé pole má tak poloviční pravděpodobnost, že se na něm zastaví.

Co nám předchozí výpočty můžou říct o hře Monopoly? Tuto otázku pojďme zodpovědět v následující podkapitole.

5.2.2 Matematika a Monopoly

Při hře Monopoly se nabízí otázka, zda je nákup některých polí výhodnější než nákup jiných. A pokud se rozhodneme zakoupit určitý počet polí na daném úseku, jakým způsobem bude nejlepší vybraná pole rozmístit, abychom dosáhli co nejvyššího zisku.

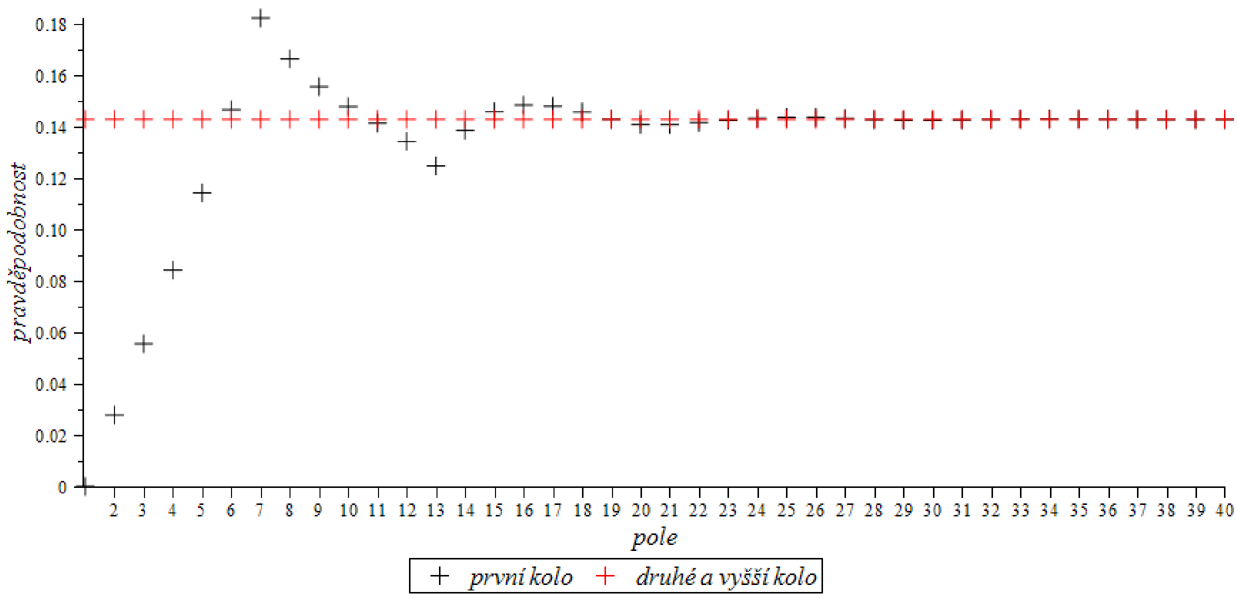
První otázka tedy zní: Může nám nákup některých stejně hodnotných polí přinést větší zisk, než nákup jiných?

A druhá: Je nějaké rozmístění nakoupených polí výhodnější?

Abychom si dané otázky zodpověděli, je třeba rozlišit dva případy, které mohou nastat tak, jak bylo řečeno v úvodu Kapitoly 5. Prvním z nich je situace, kdy se soupeřova figurka blíží z nekonečna a rádi bychom investovali do budoucna. Druhým případem je okamžik, kdy je nám soupeřova poloha známá a tvoříme strategii jen pro pár následujících tahů.

5.2.3 Figurka soupeře se blíží z nekonečna

Nejprve se vraťme ke grafu pravděpodobností jednotlivých polí z obrázku číslo 43. V tuto chvíli neberme v úvahu počátek hry, kde se pravděpodobnost polí liší, ale vycházejme z pravděpodobností alespoň druhého kola, kde jsou pravděpodobnosti ustáleny na limitní hodnotě $\frac{1}{7}$. To proto, že se naše figurka nachází na poli P_n a soupeř se blíží z nekonečna, respektive neznáme jeho polohu. Pravděpodobnost jednotlivých polí je pro popsanou situaci zaznačena červeně na obrázku číslo 44. Již z grafu 44 vyplývá podezření, že není podstatné, která pole zakoupíme, protože pravděpodobnost každého pole (s tolerancí rozdílů v řádu tisícin) je rovna hodnotě $p = \frac{1}{7}$.



Obrázek 44: Pravděpodobnost polí v prvním (černá) a dalších (červená) kolech

Přesuňme se k druhé otázce. Pro určení zda je nějaké rozmístění polí výhodnější než jiné provedeme následující úvahu.

Pro jednoduchost zvolme dvě pole P_n a P_{n+1}. Máme čtyři možnosti jak nakoupit, a to buď pole P_n, P_{n+1}, obě nebo žádné. Stejně tak existují čtyři případy, které mohou nastat. Soupeř zastaví na poli P_n, P_{n+1}, na obou nebo na žádném z polí. Pokud soupeř na jednom ze zakoupených polí zastaví, přináší nám tato situace pro každé z polí P_n a P_{n+1} stejný zisk z.

Na základě popsané úvahy bychom se rádi rozhodli jak ve hře jednat. Demonstrujme situaci na následující tabulce, kde číslo 1 značí, že soupeř na poli zastavil a číslo 0, že na poli nezastavil. Zajímat nás bude střední hodnota zisku.

Případ	P_n	P_{n+1}	Zisk
1	1	1	$2z$
2	1	0	z
3	0	0	0
4	0	1	z

Pravděpodobnost, že se figurka zastaví na poli P_n je $p_n = \frac{1}{7}$ a stejně tak, pravděpodobnost, že se zastaví na poli P_{n+1} $p_{n+1} = \frac{1}{7}$.

Z toho vyplývá pravděpodobnost případu 1. Tedy soupeř se zastaví na poli P_n i na poli P_{n+1} s pravděpodobností

$$P_1 = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{49}.$$

Obdobně budeme řešit pravděpodobnost případu 2, kdy se figurka zastaví na poli P_n a nezastaví se na poli P_{n+1}. Pravděpodobnost situace, kdy se figurka na některém poli nezastaví, je doplňkem do jedničky pro pravděpodobnost zastavení na jednotlivých polích, tedy $1 - \frac{1}{7}$. Z toho plyne

$$P_2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{49}.$$

Případ 3, tedy pravděpodobnost, že se figurka nezastaví ani na jednom z polí, bude

$$P_3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{36}{49}.$$

A pravděpodobnost případu 4, figurka se nezastaví na poli P_n a zastaví na poli P_{n+1}, bude stejná jako v případě 2

$$P_4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{49}.$$

Pro ověření

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \quad = \quad \frac{1}{49} + \frac{6}{49} + \frac{36}{49} + \frac{6}{49} = 1.$$

Nyní můžeme u určit střední hodnotu zisku pro všechny 4 případy

$$\begin{aligned} E(Z) &= \frac{1}{49} \cdot 2z + \frac{6}{49} \cdot z + \frac{36}{49} \cdot 0z + \frac{6}{49} \cdot z \\ E(Z) &= \frac{2}{7} z. \end{aligned}$$

Ke střední hodnotě zisku můžeme dojít i druhým jednodušším způsobem. Pokud figurka stoupne na pole P_n nebo na pole P_{n+1} a z každého pole nám plyne stejný zisk z, střední hodnota zisku je

$$E(Z) \quad = \quad \frac{1}{7} z + \frac{1}{7} z = \frac{2}{7} z.$$

Získali jsme tedy stejný výsledek pro oba způsoby výpočtu. A z těchto výpočtů vyplývá, že pokud se soupeřova figurka blíží z nekonečna, není důležité, která pole koupíme a jak je rozmístíme.

5.2.4 Pozice soupeře je známá

Situace bude jiná, pokud známe polohu soupeře a taktizujeme pro následující tah. Jak je vidět v grafu 44, na počátku, respektive pokud figurka vychází ze známého pole P_n, není pravděpodobnost konstantní a v průběhu hry by se této skutečnosti dalo využít. Jediné pole, ze kterého budou hráči pravidelně vycházet je pole „Ve vězení“.

Vězení

Jak bylo popsáno v pravidlech hry, do vězení se hráč může dostat třemi způsoby. Buďto se zastaví na políčku „Jdi do vězení“, nebo hodí 3× za sebou v jednom kole stejný počet ok na obou kostkách a nebo si vytáhne kartu Šance nebo Poklada označenou „Jdi do vězení“. Na poli „Ve vězení“ hráč setrvá alespoň jedno kolo, a tak se pravděpodobnost polí za vězením chová stejně jako na začátku hry. Nahlédneme-li opět do grafu na obrázku 44, tak budeme při nákupů polí za vězením, vybírat pole s nejvyšší pravděpodobností, že se na nich hráči zastaví. Vybíráme pole značené v grafu 44 černou barvou. Pokud označíme pole „Ve vězení“ jako pole P_i, pak jsou pro nás nejvýhodnější pole v tomto pořadí: $P_{i+7}, P_{i+8}, P_{i+9}, P_{i+6}$ a P_{i+10}, dále pole $P_{i+15}, P_{i+16}, P_{i+17}$ a P_{i+18}. Po pole P_{i+23} se pravděpodobnost všech ostatních polí pohybuje pod limitní hodnotou, a proto je nebudeme kupovat. Od pole P_{i+23} je střední hodnota zisku opět přibližně neměnná.

V pravidlech hry je zmíněno, že pokud nakoupíme více polí stejné barvy, vytvoříme takzvaný monopol, který nám přináší větší zisk než jednotlivá pole různých barev. Bylo by tedy vhodné, zakoupit monopol za vězením, protože by nám mohl přinést větší zisk než ostatní monopoly. Prohlédneme-li si hrací desku na obrázku 40 vidíme, že za vězením, jež je označeno vězněm za mřížemi (levý dolní roh), se nachází různá pole stejných barev. Při výběru nejvýhodnějších polí jsme jmenovali pole až po P_{i+18}. V tomto rozsahu se nachází tři pole fialové barvy, tři oranžová dále tři červená a nakonec tři žlutá, kde se poslední žluté pole nachází na pozici P_{i+19}. Tímto jsme začali uvažovat téměř polovinu hracího plánu jako možnou strategickou výhodu, ale protože se pravděpodobnost některých polí na začátku grafu pohybuje pod limitní hodnotou, určitě nám všechny monopoly nepřinesou zaručenou výhodu. Zanesme si proto zmiňovanou část hrací desky do tabulek, které popisují barvu polí a pravděpodobnost, že se soupeř vycházející z pole „Ve vězení“ na těchto polích zastaví. Jako pole P_1 je v tabulce uvažováno první pole za vězením, barvy značíme prvním písmenem anglických názvů barev a pravděpodobnost polí je zapsána jako desetinná čísla, zaokrouhlená na dvě desetinná místa, abychom mohli pohodlněji porovnat hodnoty.

Pole	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Barva	P		P	P		O		O	O		R		R
Pravděpodobnost	0		0,06	0,08		0,15		0,17	0,15		0,14		0,12

Pole	14	15	16	17	18	19
Barva	R		Y	Y		Y
Pravděpodobnost	0,13		0,15	0,14		0,14

Tabulky nám poskytly přehled o pravděpodobnosti, že se hráč vycházející z pole „Ve vězení“ zastaví na jednotlivých polích monopolů. Nyní jsme schopni určit, že si v žádném případě, nebudeme chtít zakoupit fialový monopol, protože je pravděpodobnost těchto polí nejmenší a daleko pod hranicí limitní hodnoty $p = \frac{1}{7}$, tedy pravděpodobnosti polí, že se na nich hráč zastaví v druhém a vyšším kole. U oranžového monopolu, platí pro všechna pole, že pravděpodobnost, že se na nich hráč zastaví, je vyšší než limitní hodnota, proto se jej budeme snažit celý zakoupit. Pro červený monopol se pravděpodobnost dvou polí pohybuje pod limitní hodnotou a tak pro nás není příliš výhodný a u žlutého monopolu se pravděpodobnost jednoho pole pohybuje nad limitní hodnotou, a tak máme o něco větší šanci, že pro nás bude ziskovější než ostatní monopoly na hrací desce.

V tuto chvíli, jsme dosáhli poměrně příjemného pokroku při volbě strategie během hry Monopoly. Popsali jsme však necelou polovinu hrací desky, a tak bychom se mohli zajímat, jak se chovat při pohybu na druhé půlce.

Více známých pozic

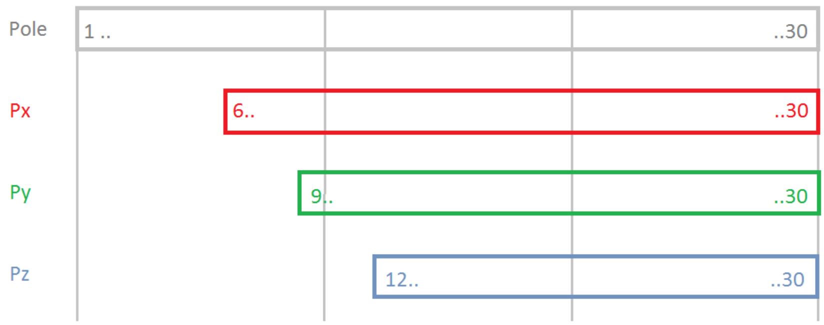
Další situace, která by mohla nastat, je případ, kdy se nacházíme na poli P_n a známe polohu více soupeřů, kteří stojí na polích P_{n-x}, P_{n-y} a P_{n-z}.

Známe výchozí polohu soupeřů a víme jak se chová pravděpodobnost pro jednoho hráče, můžeme tedy pro jednotlivá pole určit pravděpodobnost nějakého jevu. Pokud máme před protihráči náskok nebo uvažujeme o koupi polí v dražbě a rádi bychom dosáhli okamžitého zisku, můžeme určit, jaká je pravděpodobnost, že na zakoupené pole P_n postoupí alespoň jeden soupeř, a nejvýhodnější pole zakoupit. Pravděpodobnost, že se na zakoupeném poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř, získáme pro tři protihráče x, y a z doplňkovým jevem k pravděpodobnosti, že na pole P_n nepostoupí žádný soupeř, tak jak popisuje rovnice číslo (23).

$$p_n \quad = \quad 1 - (1 - p_x) \cdot (1 - p_y) \cdot (1 - p_z) \tag{23}$$

Příklad 8

Uvažujme nejprve případ kdy se soupeři nachází na polích P_{n-9}, P_{n-6} a P_{n-3}, tedy soupeř x se nachází na poli 6, soupeř y na poli 9 a soupeř z na poli 12. Celkový počet polí na hrací desce je 40. Výpočet pravděpodobností polí, pro toto rozestavení hráčů ilustruje obrázek číslo 45.



Obrázek 45: Ilustrace výpočtu pravděpodobnosti pro 4 hráče

V tomto konkrétním případě je pravděpodobnost polí P_6, P_7 a P_8 ovlivněna pouze soupeřem x, tedy

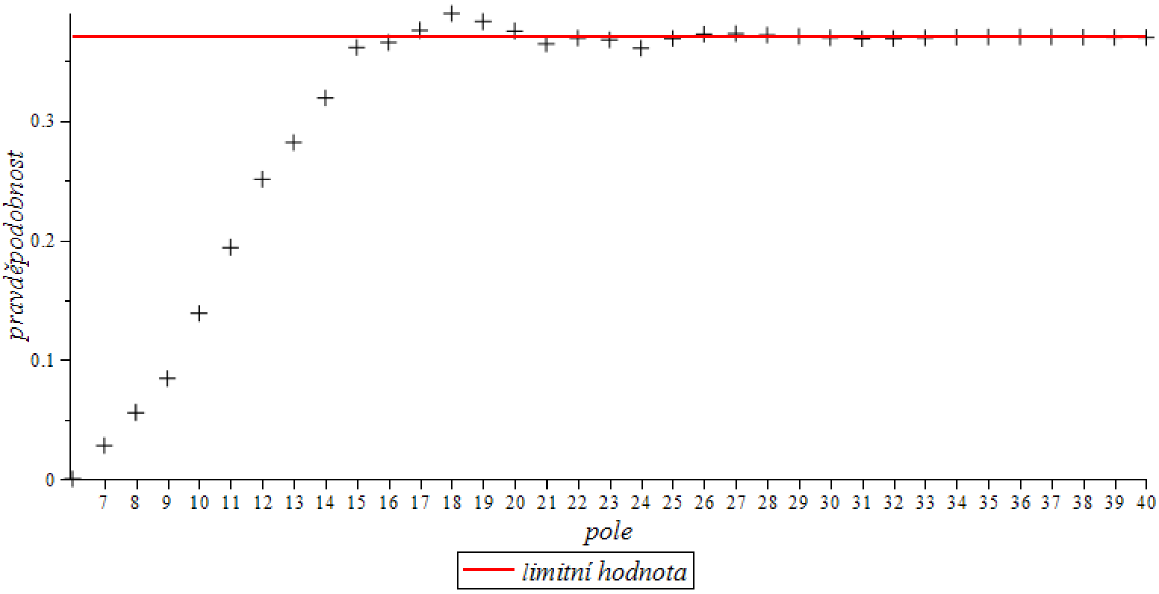
$$\begin{aligned} p_6 &= p_{x_1}, \\ p_7 &= p_{x_2}, \\ p_8 &= p_{x_3}. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost polí P_9, P_{10} a P_{11} budeme počítat následovně

$$\begin{aligned} p_9 &= 1 - (1 - p_{x_3}) \cdot (1 - p_{y_1}), \\ p_{10} &= 1 - (1 - p_{x_4}) \cdot (1 - p_{y_2}), \\ p_{11} &= 1 - (1 - p_{x_5}) \cdot (1 - p_{y_3}) \end{aligned}$$

a od pole P_{12} jsou výsledné pravděpodobnosti ovlivněny i třetím hráčem a budeme je počítat takto

$$\begin{aligned}
p_{12} &= 1-(1-p_{x_6})\cdot(1-p_{y_4})\cdot(1-p_{z_1}),\\
p_{13} &= 1-(1-p_{x_7})\cdot(1-p_{y_5})\cdot(1-p_{z_2}),\\
p_{14} &= 1-(1-p_{x_8})\cdot(1-p_{y_6})\cdot(1-p_{z_3}).\\
&\vdots
\end{aligned}$$



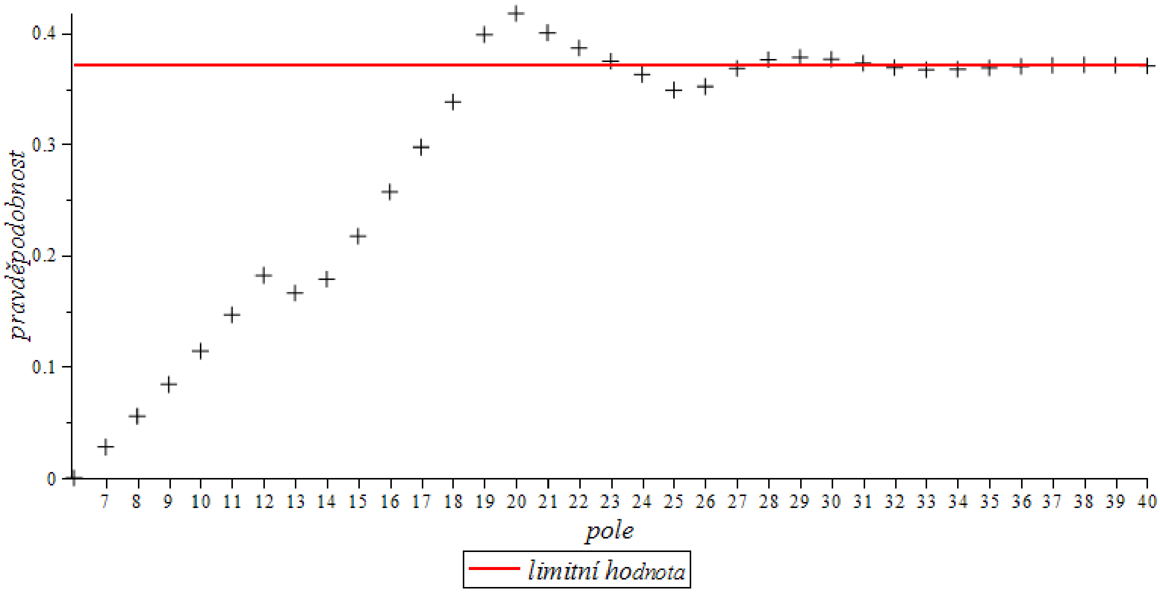
Obrázek 46: Pravděpodobnost, že se na poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř pro tři soupeře nacházející se na polích P_6, P_9 a P_{12}

V grafu na obrázku číslo 46 jsou zaznamenány výsledné pravděpodobnosti, že se na poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř. Červená čára značí limitní hodnotu pravděpodobnosti, kdy se na poli zastaví alespoň jeden soupeř. Tuto hodnotu můžeme získat výpočtem podobně jako v Kapitolách 4 a 5.2, ale pro tentokrát si dovolíme využít jako limitní hodnotu pravděpodobnost posledního pole P_{40}, protože ze zkušeností víme, že pro vysoké indexy pole je pravděpodobnost blízko limitní hodnotě. Za výhodná pole budeme uvažovat ty, jejichž pravděpodobnost se pohybuje nad limitní hodnotou. Po nahlédnutí do grafu 46 můžeme určit, že při nákupu budeme volit pole v tomto pořadí P_{18}, P_{19}, P_{17} a P_{20}. Mírně nad limitní hodnotou jsou i pole P_{27} a P_{28}.

■

Příklad 9

V dalším příkladě umístěme soupeře na polích P_6, P_{13} a P_{14}. Tuto situaci zachycuje graf na obrázku číslo 47, ve kterém vidíme, že tentokrát zvolíme pole v pořadí P_{20}, P_{21}, P_{19} a P_{22} a o něco výhodnější jsou i pole P_{29}, P_{30}, P_{28} a P_{31}.



Obrázek 47: Pravděpodobnost, že se na poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř pro tři soupeře nacházející se na polích P_6, P_{13} a P_{14}

■

Příklad 10

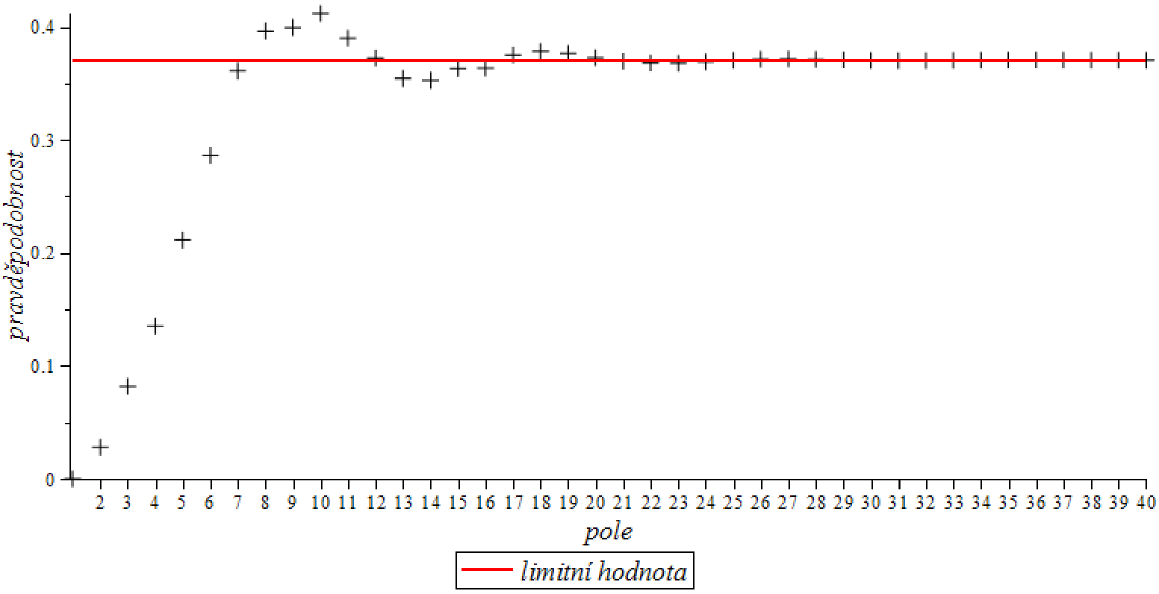
Dále zvolme například okamžik, kdy se figurky soupeřů nachází na polích P_1, P_2 a P_4. Výsledky jsou zachyceny v grafu na obrázku číslo 48. Zde vybereme pole v pořadí P_{10}, P_9, P_8 a P_{11}. A můžeme zvážit i pole P_{18}, P_{19}, P_{17} a P_{20}.

■

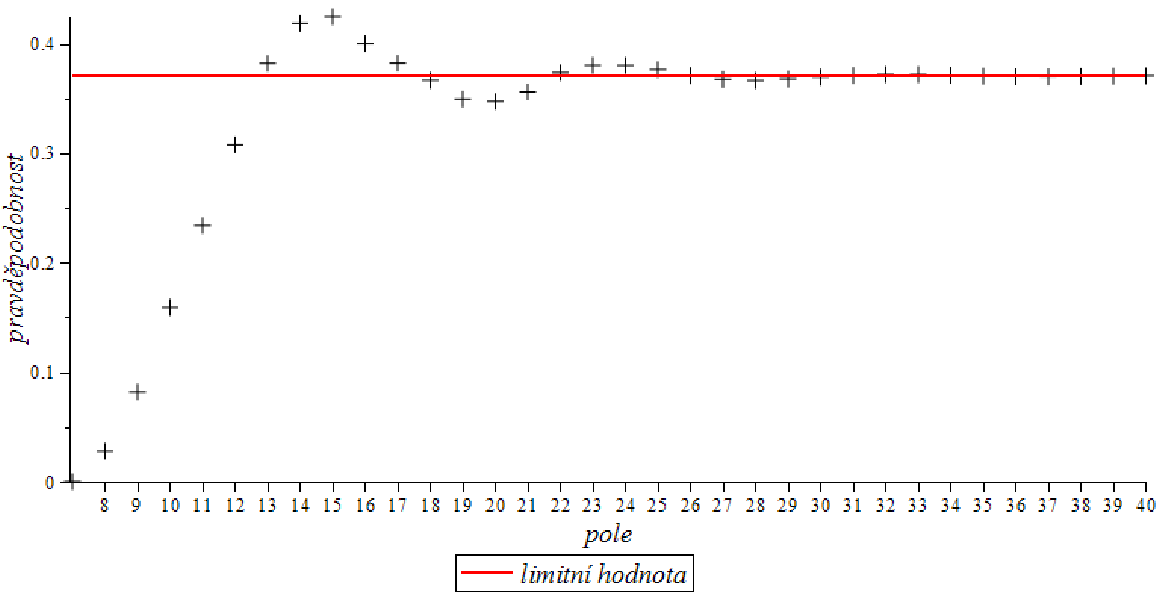
Příklad 11

V posledním příkladu uvažujme situaci, kdy soupeři stojí na polích P_7,P_8 a P_9. Pravděpodobnost jednotlivých polí je zachycena v grafu číslo 49. Na základě grafu zvolíme pole v pořadí $P_{15}, P_{14}, P_{16}, P_{13}$ a P_{17}. A vezmeme v úvahu i pole P_{24}, P_{23}, P_{25} a P_{22}.

■



Obrázek 48: Pravděpodobnost, že se na poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř pro tři soupeře nacházející se na polích P_1, P_2 a P_4



Obrázek 49: Pravděpodobnost, že se na poli P_n zastaví alespoň jeden soupeř pro tři soupeře nacházející se na polích P_7, P_8 a P_9

Z grafů na obrázcích číslo 46, 47, 48 a 49 můžeme vypozorovat, že pravděpodobnost polí vždy vytvoří jednu větší a druhou méně výraznou „vlnu“, kde se pravděpodobnost polí, že na ně postoupí alespoň jeden soupeř, pohybuje nad limitní hodnotou. Pro určení strategie ve hře by bylo vhodné zjistit, kdy tento jev vzniká. Připomeňme, že číslo s nejvyšší pravděpodobností byla 7 a stejně tak jsme v grafech číslo 42 a 43 zjistili, že nejvyšší pravděpodobnost, že se na něm soupeř zastaví má pole P_7. Dále víme, že čím víc je hráčů na hrací desce, tím vyšší bude pravděpodobnost pole P_n, že na něj alespoň jeden postoupí. Z těchto tvrzení můžeme vyvodit závěr, že by mělo být nejvýhodnější sedmé pole od okamžiku, kdy pravděpodobnost polí ovlivňují všichni soupeři. Jinak řečeno nejvýhodnější pole by se mělo nacházet sedm polí od pole, kde se nachází hráč nejvzdálenější od počátku (Počítáno včetně pozice tohoto hráče.). Označíme-li hráče nejvzdálenějšího od počátku jako hráče z a jeho pozici jako pole P_z, pak by pole s nejvyšší pravděpodobností, že na něj postoupí alespoň jeden hráč, mělo být pole P_{z+6}.

Pokud opět nahlédneme do výsledných grafů, pak se v příkladu 8 hráč z nachází na poli P_{12}. Postoupíme-li od této pozice o dalších 6 polí získali jsme pole s nejvyšší hodnotou a pravděpodobnost předchozího i následujícího pole se také nachází nad červenou čárou. To stejné platí i v příkladech 9, 10 a 11, až na skutečnost, že se nad limitní hodnotou, pohybuje i pravděpodobnost dalších polí v okolí. Ale protože tomu tak nebylo v příkladě číslo 8 můžeme vyvodit jen tvrzení, že pokud se soupeř nejvzdálenější od počátku nachází na poli P_z pak nejvyšší pravděpodobnost, že na něj postoupí alespoň jeden hráč má pole P_{z+6} a výhodnější než ostatní budou i pole P_{z+5} a P_{z+7}.

V podkapitole věnující se hře Monopoly jsme zjistili, že při hře můžeme zvolit poměrně jednoduchou strategii. Významné pravděpodobnostní jevy, které pokrývají téměř polovinu hrací desky, nám poskytuje pole „Ve vězení“. Za ním se nacházejí nejen jednotlivá pole výhodnější pro koupi, ale i celé monopoly, jež nám můžou přinést vyšší zisk než ostatní. Z krátkodobého hlediska, kdy se budeme chtít pokusit o zisk v právě probíhajícím kole, pak využijeme situace, kdy budou hráči mírně „seskupení“ a koupíme pole, jež se nachází 6 polí za hráčem, který je nejvzdálenější od počátku.

Závěr

Cílem práce bylo rozebrat strategii ve hrách, kde figurka postupuje po polích herního plánu na základě hodu kostkou. Nejprve jsme podrobně rozebrali pravděpodobnost, že figurka hráče postoupí na určité pole pro hru se spravedlivou šestistěnnou kostkou. Došli jsme k závěru, že s nejnižší pravděpodobností postoupí figurka na pole P_1 a naopak nejpravděpodobnější je pole P_6. To je způsobeno skutečností, že je jen jedna možnost jak se dostat na pole P_1, hodit číslo 1. Avšak existuje velké množství kombinací hodů jak postoupit na pole P_6. Potvrdili jsme tak předpoklad, že pro různá pole hracího plánu je pravděpodobnost různá, ale zjistili jsme, že to platí jen pro počátek hry, nebo pro případy, kde známe výchozí pozice hráčů. Od určité pozice n se pak pravděpodobnost každého pole blíží limitní hodnotě $A = \frac{2}{7}$ dané posloupnosti $\{a_n\}$.

Rovnice pro výpočet pravděpodobnosti, že figurka hráče postoupí na určitá pole, nás přivedla k tématu rekurentních rovnic, jak bylo řečeno v úvodu práce. Znalosti nabyté v kapitole o rekurentních rovnicích nám pak pomohly nejen stanovit limitu posloupnosti $\{a_n\}$, ale i při určování podmínek, za jakých se dá pravděpodobnost jednotlivých polí považovat za „ustálenou“, jinak řečeno při zkoumání konvergence pravděpodobnosti k limitní hodnotě.

Krátce jsme se věnovali i situacím, kdy byla spravedlivá šestistěnná hrací kostka nahrazena kostkou vícestěnnou nebo kostkou s předepsanými pravděpodobnostmi stěn. Srovnávali jsme změnu pravděpodobnosti postupu hráče na dané pole, střední hodnotu posunu hráče po hrací desce a pokoušeli se stanovit, jak výsledky ovlivní průběh hry.

V části o vícestěnných hracích kostkách jsme zvolili vyvážený dvanáctistěn a došli k závěru, že hráč bude po hrací desce postupovat téměř dvakrát rychleji, a tak je pravděpodobnost každého pole nižší, než při hře s klasickou kostkou. Při zvažování, jak může změna kostky ovlivnit strategii hry, jsme ukázali, že přiblížení se limitní hodnotě má v případě vícestěnné hrací kostky delší průběh, proto v prvním kole využijeme většího počtu polí s různou pravděpodobností, například k taktickému nákupu polí ve hrách jako jsou Monopoly, anebo při hraní „Člověče, nezlob se!“, k vyhýbání se polím s vysokou pravděpodobností, že na ně postoupí i soupeř a vyhodí naší figurku.

Při práci s hrací kostkou s předepsanými pravděpodobnostmi stěn jsme vybrali kostku s dvakrát vyšší pravděpodobností, že padne číslo 6. Po rozboru průběhu hry s takovou kostkou jsme získali podobné výsledky jako při hře s vícestěnnou kostkou, a tak jsme došli k závěru, že se vlastně jedná o speciální případ vícestěnné hrací kostky. Při úvahách nad možnou strategií ve hře jsme sice potvrdili, že nepoctivý hráč má jisté výhody, ale například ve hrách, kde nakupujeme některá pole, můžeme využít skutečnosti, že víme, kde se takový hráč bude na počátku hry vyskytovat nejčastěji, tato pole nakoupit a využít jeho výhodu v náš prospěch.

Poměrně rozsáhlá část práce je věnována rozboru her „Člověče, nezlob se!“ a Monopoly. V této kapitole, jsme většinu informací získaných dříve prakticky aplikovali, při snaze dojít k určité strategii, jež by nám v průběhu hry mohla poskytnout výhodu.

Při zkoumání hry „Člověče, nezlob se!“ jsme na základě výpočtů, potvrdili předpoklad, že čím více soupeřů se za naší figurkou nachází, tím vyšší je naše ohrožení. Dále jsme rozebrali i případy, kdy je hráč buďto za námi a nebo před námi. Zde se potvrdil závěr, že pokud se za námi nachází hráč, je vždy bezpečnější prchat a pokud je soupeřova figurka před naší, pak není moudré přesunout se před ni. Určování strategie při hře „Člověče, nezlob se!“ úzce souvisí s konkrétním rozestavěním hráčů, a tak není jednoduché určit konkrétnější taktiku.

Pro hru Monopoly jsme dosáhli konkrétnějšího závěru. Při rozboru jsme se zaměřili na pole zvané „Ve vězení“, protože pravděpodobnost, že hráč postoupí na pole P_n se za tímto polem chová stejně jako na počátku hry. Dokázali jsme tak určit konkrétní monopol, který bude v průběhu hry nejvýhodnější nakoupit a další pravděpodobnostní jevy jež pokrývají téměř polovinu polí hrací desky.

Poté zbývala druhá polovina hrací desky, kde je pravděpodobnost polí v druhém a vyšším kole konstantní, a protože jsme už v úvodu kapitoly o hře Monopoly zjistili, že za těchto podmínek není žádné pole, nebo rozmístění zakoupených polí výhodnější než jiné, vrátili jsme se k výpočtu pravděpodobnosti polí na základě konkrétního rozmístění hráčů. Když jsme se zaměřili na dosažení zisku v následujícím kole, podařilo se nám v několika příkladech určit, jaká je pravděpodobnost, že na pole P_n postoupí alespoň jeden soupeř a zvážit, která pole jsou nejvhodnější ke koupi. Na základě výpočtů, jsme došli k závěru, že při volbě taktiky ve hře Monopoly vlastně nepotřebujeme ani kalkulačku, protože se ukázalo, že nejvýhodnější bude vždy šesté pole za hráčem nejvzdálenějším od počátku.

Protože bylo zapotřebí definovat a popsat mnoho pojmů vedoucích k aplikaci teorie pravděpodobnosti na konkrétních hrách, bylo rozebráno jen několik případů a obecné závěry by bylo možné upřesnit na základě většího množství konkrétních situací. To však nebylo cílem práce, smyslem bylo ukázat vhodné metody a jejich použití. Na práci by se tedy dalo navázat nejen podrobnějším rozborem situací, které mohou nastat při hrách „Člověče, nezlob se!“ a Monopoly, ale i analýzou dalších deskových her, kterých je nespočet a i když mají všechny velice podobný základ, strategie se mohou veskrze lišit.

Literatura

[1] TRUCKER, Alan, Applied combinatorics, 3rd ed., USA:John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[2] STEJSKALOVÁ, Helena, Hru „Člověče, nezlob se!“ proslavili ranění vojáci, In: *epochaplus.cz* [online]. 18. 3. 2015 [cit. 8. 4. 2017]. Dostupné z: http://epochaplus.cz/hru-clovece-nezlob-se-proslavili-raneni-vojaci/ .

[3] „Člověče, nezlob se!“, In: *albi.cz* [online]. [cit. 8. 4. 2017]. Dostupné z: http://www.albi.cz/gallery/download/3168/.

[4] Monopoly, In: *deskovehry.info* [online]. 19. 10. 2009 [cit. 10. 4. 2017]. Dostupné z: http://www.deskovehry.info/pravidla/monopoly.htm.

[5] Monopoly, In: *deskovehry.cz* [online]. 26. 10. 2015 [cit. 10. 4. 2017]. Dostupné z: http://www.deskovehry.cz/index.php/Monopoly.

Zdroje obrázků

- Obrázek číslo 5: Fibonacciho králíci, In: *curiosamathematica.tumblr.com* [online] Dostupné z: http://curiosamathematica.tumblr.com/post/89242983089/the-life-and-numbers-of-fibonacci.
- Obrázek číslo 16: Hrací deska hry „Člověče, nezlob se!“, In: *openoffice.cz* [online] Dostupné z: https://www.openoffice.cz/navody/draw-vytvorte-si-clovece-nezlob-se.
- Obrázek číslo 40: Hrací deska hry Monopoly, In: *thestudentroom.co.uk* [online] Dostupné z: https://www.thestudentroom.co.uk/showthread.php?t=2715414.